

Министерство образования Российской Федерации

Южно-Уральский государственный университет

Златоустовский филиал

Кафедра физики № 3

53(07)

С 594

Н.М. Соколова, В.И. Биглер

Ф И З И К А

Курс лекций

Часть 2

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<u>Предисловие</u>	4
1.	<u>Введение</u>	5
1.1.	<u>Некоторые понятия векторного анализа</u>	5
1.2.	<u>Электрический заряд</u>	8
2.	<u>Электростатическое поле</u>	9
2.1.	<u>Силовая характеристика электростатического поля</u>	9
2.2.	<u>Закон Кулона. Вычисление напряжённости поля точечного заряда</u>	11
2.3.	<u>Теорема Остроградского — Гаусса</u>	12
2.4.	<u>Применение теоремы Гаусса к вычислению напряжённости поля заряженной плоскости и двух параллельных плоскостей</u>	15
2.5.	<u>Вычисление напряжённости поля заряженного шара</u>	18
2.6.	<u>Работа электростатических сил. Потенциальность поля</u>	19
2.7.	<u>Потенциал электростатического поля. Связь напряжённости с потенциалом</u>	22
2.8.	<u>Эквипотенциальные поверхности. Вычисление потенциала</u>	23
2.9.	<u>Проводники в электрическом поле</u>	27
2.10.	<u>Ёмкость. Конденсаторы</u>	29
2.11.	<u>Энергия электрического поля</u>	30
2.12.	<u>Электростатическое поле в диэлектриках</u>	31
2.13.	<u>Электрический ток, его характеристики и условия возникновения</u>	34
2.14.	<u>Основные законы электрической цепи</u>	36
2.15.	<u>Удельное сопротивление</u>	39
2.16.	<u>Деление веществ на три класса</u>	40
2.17.	<u>Квантование электрического заряда</u>	43
	<u>Вопросы для самоконтроля</u>	44
3.	<u>Магнитное поле</u>	45
3.1.	<u>Взаимодействие движущихся зарядов</u>	45
3.2.	<u>Магнитное взаимодействие как релятивистский эффект</u>	46
3.3.	<u>Вектор магнитной индукции</u>	48
3.4.	<u>Закон Био-Савара</u>	51
3.5.	<u>Вычисление напряжённости магнитного поля прямого тока</u>	52
3.6.	<u>Движение зарядов под действием силы Лоренца</u>	54
3.7.	<u>Сравнение свойств магнитных и электрических полей. Теорема полного тока</u>	56
3.8.	<u>Вычисление напряжённости магнитного поля тора и соленоида</u>	58
3.9.	<u>Примеры использования силы Лоренца</u>	59
3.10.	<u>Амперова сила. Работа перемещения тока в магнитном поле</u>	63
3.11.	<u>Рамка с током в магнитном поле</u>	64
3.12.	<u>Электромагнитная индукция. Законы Фарадея и Ленца</u>	66
3.13.	<u>Взаимо- и самоиндукция</u>	69
3.14.	<u>Трансформация постоянных токов</u>	71
3.15.	<u>Единицы измерения магнитных величин</u>	71
3.16.	<u>Вычисление индуктивности</u>	72

3.17.	<u>Энергия магнитного поля</u>	73
4	<u>Электромагнитное поле</u>	74
4.1.	<u>Обобщение Максвеллом закона полного тока. Гипотеза о токе смещения</u>	74
4.2.	<u>Обобщение Максвеллом закона электромагнитной индукции. Гипотеза о существовании вихревого электрического поля</u>	77
4.3.	<u>Гипотеза о существовании электромагнитного поля. Электромагнитная волна, скорость её распространения</u>	78
4.4.	<u>Шкала электромагнитных волн</u>	81
	<u>Вопросы для самоконтроля</u>	85
	<u>Именной указатель</u>	86
	<u>Литература</u>	88

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вторая часть курса лекций состоит из трёх разделов: *электрическое поле*, *магнитное поле* и *электромагнитное поле*. Этим разделам предшествует введение, в котором подробно изложено понятие электрического заряда и современная проверка закона его сохранения, а также рассмотрены некоторые понятия теории поля — поток, градиент и циркуляция. Обычно при строгом изложении рассматриваемых разделов физики вводят также понятия ротора и дивергенции, однако в пособии они не используются, поскольку разделы электричества и магнетизма читаются студентам на первом курсе, когда студенты ещё не владеют соответствующим математическим аппаратом.

В разделе "Электрическое поле" изложен материал, именуемый обычно электростатикой. Помимо традиционно излагаемых вопросов (закон Кулона, напряжённость и потенциал, теорема Гаусса, свойства потенциальных полей, проводники и диэлектрики в электрическом поле, ёмкость, энергия), в этот раздел включены также законы электрической цепи для постоянного тока. Уделено внимание проводимости металлов, полупроводников и диэлектриков с учётом состояния науки на настоящий момент времени. Рассмотрено несколько примеров решения задач на расчёты потенциала и напряжённости.

Магнетизм в учебной литературе излагается обычно двумя способами: следуя историческому развитию науки — как совокупность экспериментальных фактов, либо релятивистски — с их логическим обоснованием. В лекциях предложен другой путь. Не придерживаясь хронологии открытий в электродинамике, за основу взята сила взаимодействия двух движущихся точечных зарядов. На основе её анализа выводятся законы электродинамики. Логическое обоснование этой силы приведено в самом начале изложения, и оно может быть понято даже теми читателями, которые не были ранее знакомы с теорией относительности. В разделе подчёркивается практическое значение изучаемых законов: рассмотрены принципы действия генератора и двигателя, циклические ускорители, МГД-генератор, масс-спектрографы. Уделено внимание единицам измерения магнитных величин.

В третьем разделе изложены максвелловские гипотезы. При рассмотрении уравнений подчёркнуто, в чём заключается обобщение Максвеллом соответствующего экспериментального закона электродинамики, и это обобщение (физическая идея) отделено от его математического выражения. Уравнений приведено два, а не четыре, как это делается обычно. Кроме того, сначала рассматривается двумерный случай, а затем он сводится к одномерному. Такой подход может быть оправдан желанием сделать изложение как можно более доступным для студентов первого курса.

Пособие завершается "Именным указателем", в котором приведены имена, деяния и годы жизни учёных, внесших наибольший вклад в развитие учения об электричестве и магнетизме.

В конце 2-го и 3-его разделов помещены вопросы для самопроверки степени усвоения и понимания излагаемого в этих разделах материала. Для успешного освоения программного материала необходима не только систематическая работа с конспектом лекций и рекомендуемой литературой, но и решение соответствующих задач, выполнение лабораторных работ физического практикума.

Мы желаем читателям успехов на избранном ими пути к образованию!

Авторы

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Некоторые понятия векторного анализа

Во второй части курса общей физики рассмотрим электромагнитное поле и его частные случаи — электростатическое поле и магнитное поле. При изложении ряда вопросов этого раздела мы встретимся с некоторыми новыми понятиями: *поток* и *циркуляцией* векторной функции, а также с *градиентом* скалярной функции. Рассмотрим их последовательно.

1. Определим *элементарный поток* $d\Phi$ любого вектора \vec{b} через бесконечно малую площадку da как *скалярное произведение* этого вектора на элемент поверхности или, иначе, на *вектор площадки*

$$d\vec{a} = da \cdot \vec{n}, \quad (1.1)$$

где \vec{n} — внешняя нормаль к площадке da . Очевидно, что элемент поверхности $d\vec{a}$ направлен перпендикулярно поверхности в каждой ее точке. Руководствуясь определением потока, и обозначив его через Φ , можно записать

$$d\Phi = \vec{b} \cdot d\vec{a} = b \cdot da \cdot \cos\alpha, \quad (1.2)$$

где α — угол между вектором \vec{b} и нормалью, проведенной к элементу поверхности (рис. 1.1), а $d\Phi$ — элементарный поток вектора \vec{b} .

Название величины Φ — *поток* — взято из гидродинамики. Действительно, если \vec{v} — скорость текущей жидкости, а a — площадь погруженной в нее плоской сетки, то объем жидкости, протекающей через сетку в единицу времени, будет равен

$$\Phi = v \cdot a \cdot \cos\alpha, \quad (1.3)$$

то есть Φ здесь — это поток вектора скорости.

На рис. 1.2 представлены три различные ориентации этой сетки. Очевидно, что последнее равенство (1.3) может быть получено интегрированием по всей поверхности a равенства (1.2), определяющего понятие элементарного потока, при условии, что величина вектора скорости и угол α постоянны по всей поверхности.

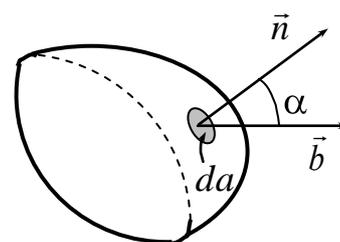


Рис. 1.1

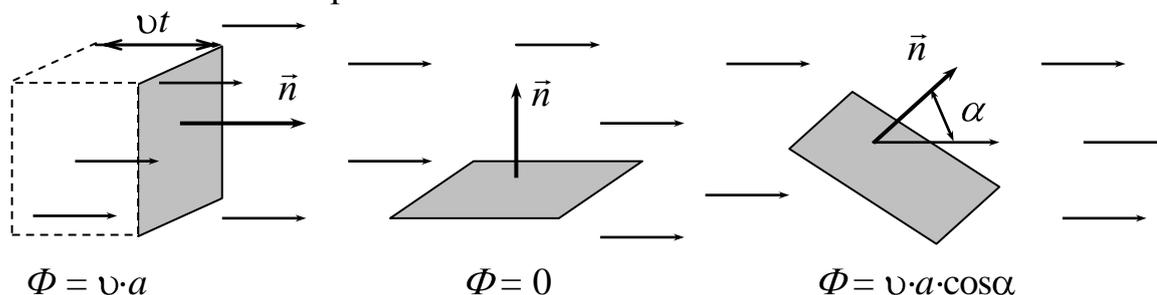


Рис. 1.2

Естественно, что понятие потока применимо к любому множеству векторов, имеющих тот или иной физический смысл. Мы воспользуемся этим понятием дважды — изучая электростатическое и магнитное поля.

2. Понятие, к рассмотрению которого мы теперь переходим, несколько более сложно. Пусть имеется совокупность векторов \vec{b} , различной длины и направления, и задана некоторая кривая L , которую можно разбить на элементы $d\vec{l}$ (рис. 1.3). Требуется найти сумму скалярных произведений вектора \vec{b} на соответствующий ему элемент перемещения $d\vec{l}$. Очевидно, что на каждом элементе $d\vec{l}$ вектор \vec{b} имеет свое направление и величину. Если кривая L замкнута, интегрирование ведется по замкнутому контуру, что обозначается кружком у знака интеграла, а интеграл от вектора \vec{b} носит название *циркуляции* \vec{b} вдоль контура L :

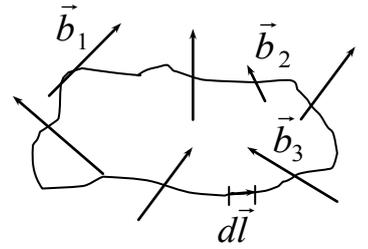


Рис. 1.3

$$\oint \vec{b} d\vec{l} = \oint b dl \cos \alpha = \oint b_l d\vec{l}, \quad (1.4)$$

где b_l есть проекция вектора на соответствующий элемент контура.

Положим теперь, что контур L есть плоский прямоугольник (рис. 1.4), имеющий стороны Δx и Δy . Выбрав обозначенное стрелкой направление обхода, начатого из точки A , получим возможность представить означенный выше интеграл суммой четырех произведений, взятых последовательно по каждой из сторон:

$$\oint b_l dl = b_{x_1} \Delta x + b_{y_1} \Delta y - b_{x_2} \Delta x - b_{y_2} \Delta y, \quad (1.5)$$

где b_{x_1} , b_{x_2} , b_{y_1} , b_{y_2} — значения проекций вектора \vec{b} на соответствующие стороны прямоугольника. Отрицательный знак появляется потому, что обход по контуру дважды совпадает с убылью координаты. Условимся выбирать прямоугольник столь малым, чтобы на его сторонах Δx и Δy соответствующие проекции вектора \vec{b} можно было бы считать постоянными. Последнее означает, что при обходе, например, по стороне Δy проекция b_y сохраняет свое значение, но проекция b_x будет меняться. При обходе по Δx , естественно, меняться будет проекция b_y . Изменение проекции b_y на единицу пути по оси x составит $\frac{\partial b_y}{\partial x}$, а изменение b_x на единицу пути по оси y — $\frac{\partial b_x}{\partial y}$. Значения b_y , например, на отрезках AD и BC будут отличаться друг от друга на величину $\frac{\partial b_y}{\partial x} \Delta x$. Следовательно

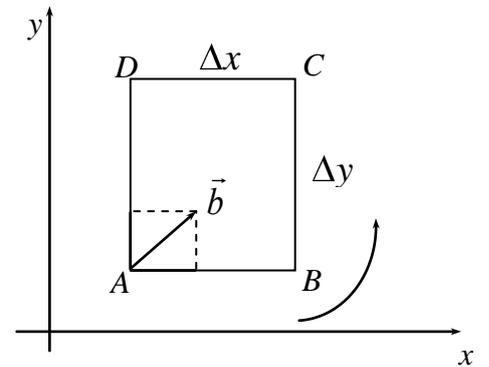


Рис. 1.4

Тогда

$$b_{y_1} = b_{y_2} + \frac{\partial b_y}{\partial x} \Delta x; \quad b_{x_2} = b_{x_1} + \frac{\partial b_x}{\partial y} \Delta y. \quad (1.6)$$

$$\oint b_l dl = b_{x_1} \Delta x + (b_{y_2} + \frac{\partial b_y}{\partial x} \Delta x) \Delta y - (b_{x_1} + \frac{\partial b_x}{\partial y} \Delta y) \Delta x - b_{y_2} \Delta y. \quad (1.7)$$

Раскрывая скобки и заменяя произведение $\Delta x \Delta y$ через ΔS , получим:

$$\oint b_l dl = \frac{\partial b_y}{\partial x} \Delta S - \frac{\partial b_x}{\partial y} \Delta S. \quad (1.8)$$

Полученное выражение есть *циркуляция* вектора \vec{b} в двумерном случае.

3. Коснемся теперь еще одного понятия — *градиента*. Пусть имеется скалярное поле φ , то есть заданные в каждой точке значения некоторой скалярной величины φ . Выделим в нем совокупность точек, где значения функции φ одинаковы (рис. 1.5) и равны какому-либо значению φ_0 . Эта совокупность образует поверхность, называемую *поверхностью уровня*. Рядом расположены поверхности с большими и меньшими значениями этой же скалярной величины.

Выберем произвольное направление \vec{l} . Производная $\frac{d\varphi}{dl}$ будет характеризовать изменение

функции φ на единицу длины в направлении \vec{l} . Теперь проведем к поверхности φ_0 нормаль \vec{n} .

Производная $\frac{d\varphi}{dn}$ будет также характеризовать

изменение этой же функции φ на единицу длины, но уже в направлении \vec{n} . Естественно, значения производных не будут одинаковы: производная по n больше производной по l .

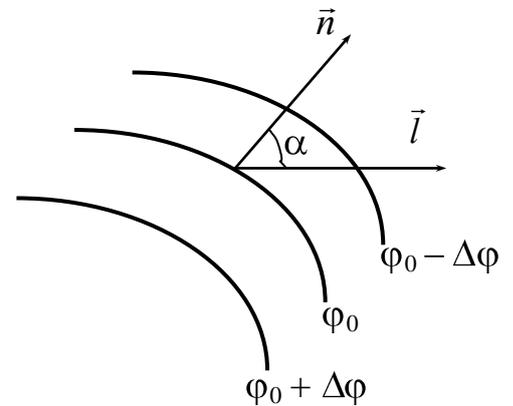


Рис. 1.5

Вектор, численно равный $\frac{d\varphi}{dn}$ и направленный по нормали к поверхности уровня, называют *градиентом* скалярной функции φ :

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n}. \quad (1.9)$$

Очевидно, что производная от φ по направлению l равна проекции вектора градиента на это направление, так как $\partial n = \partial l \cos \alpha$ (см. рис. 1.5). Отсюда можно заключить, что в направлении вектора градиента значение функции φ меняется наиболее быстро: при положительном значении градиента — возрастает, при отрицательном — уменьшается.

В декартовых координатах градиент можно представить как векторную сумму его проекций на оси координат:

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (1.10)$$

1.2. Электрический заряд

Определения, что такое электрический заряд, величина которого обозначается обычно буквами q или Q , нет. Но широко известно, что существуют два сорта зарядов, один из которых назван положительным, а второй отрицательным. Одинаковые сорта отталкиваются, а разные — притягиваются. Сила их взаимодействия во много раз больше, чем сила гравитационного притяжения. В случае, если положительные и отрицательные заряды перемешаны поровну, отталкивание и притяжение будут сбалансированы. Такой совершенный, точный баланс существует в окружающей нас живой и неживой природе. Нарушение его привело бы к проявлению огромных электрических сил. Для того, чтобы представить их величину, заметим, что если бы в одном из двух человек, стоящих на расстоянии вытянутой руки друг от друга, электронов оказалось бы на 1% больше, чем положительных зарядов, силы их взаимного отталкивания хватило бы, чтобы поднять Землю!

Электрические силы, удерживающие атомы и молекулы друг подле друга, обеспечивают высокую жесткость и прочность состоящих из них веществ. Вспомним, к примеру, металлические конструкции и стройматериалы, обеспечивающие прочность даже нью-йоркским небоскреbam. В конечном итоге, вся Вселенная представляет собой хорошо уравновешенную смесь положительных и отрицательных зарядов. Он подтвержден опытами, специально поставленными в 1963–1964 годах. Простейшей системой положительных и отрицательных зарядов является атом, в целом нейтральный. Поэтому пучок летящих в вакууме атомов не должен испытывать ни отклонения, ни рассеяния при прохождении через сильное электрическое поле. В описываемых опытах такое рассеяние было бы замечено, если бы сумма зарядов одного знака превышала в пучке сумму зарядов другого знака на величину, равную 10^{-20} заряда электрона. Но даже такое малое отклонение от их равенства не наблюдается.

Известен опытный *закон сохранения заряда*: полный заряд изолированной системы никогда не изменяется. Заряд нельзя создать либо уничтожить, его можно лишь перенести с одного тела на другое. Явление возникновения заряда не наблюдалось никогда; заряды возникают только парами — положительный и равный ему отрицательный. Закон сохранения заряда есть опытный закон так же, как и закон сохранения энергии, импульса.

Любопытнейшим опытным фактом является также квантованность электрического заряда: существует “квант” электричества, минимальная его порция, равная заряду электрона. Эта порция одинакова по величине как для положительных, так и для отрицательных зарядов и составляет $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл в Международной системе единиц СИ. Величина этой порции принята за единицу измерения заряда в молекулярной, атомной и ядерной физике, физике элементарных частиц. Так, например, заряд ядра атома лития, совпадающий, как известно, с номером этого элемента в периодической системе Менделеева, равен трем. Если вы хотите найти этот заряд в *кулонах* — единице измерения заряда в СИ, следует указанный выше заряд электрона умножить на три.

Любой электрический заряд создает вокруг себя поле, благодаря которому взаимодействует с другим зарядом, находящимся на расстоянии от него. Покоящийся заряд создает поле, которое называется *электростатическим*. Движущийся равномерно заряд создает также и *магнитное* поле. И, наконец, заряд, движущийся с ускорением, создает *электромагнитное* поле. Эти поля обладают разными свойствами, но все являются объективной реальностью и широко используются в науке и технике. К описанию свойств первого из этих полей мы теперь переходим.

2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

2.1. Силовая характеристика электростатического поля

Поле, создаваемое неподвижными зарядами, называется *электростатическим*. Электростатическое поле может быть обнаружено лишь тогда, когда в него помещен электрический заряд (назовем его *пробным*). Величину поля в каждой точке можно характеризовать величиной силы, действующей на этот пробный заряд, а направление поля определять по направлению силы. Пусть сила, действующая на пробный заряд, равна \vec{F} . Она будет зависеть как от величины пробного заряда, так и от величины поля в данной точке.

Назовем *напряжённостью* электростатического поля отношение

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \quad (2.1)$$

где q — пробный заряд, который всегда принимается *положительным*.

Здесь уместно заметить, что введенное определение напряжённости, как и все последующие основанные на этом определении рассуждения, не соответствовали бы действительности, если бы сила \vec{F} не была обнаружена на опыте. Для того, чтобы убедиться в ее существовании, нет даже необходимости в специальном оборудовании: всякий знает, что легкие тела притягиваются любым наэлектризованным телом, и сила \vec{F} совершает заметную невооруженным глазом механическую работу по перемещению этих тел.

Согласно определению (2.1), напряжённость равна силе, действующей на единицу пробного заряда, поэтому от величины его зависеть не будет. Вектор напряжённости совпадает по направлению с этой силой, так как по определению пробный заряд — положительный.

Следует помнить, что напряжённость есть характеристика поля, которое существует независимо от того, введен в него пробный заряд, или нет. Следовательно, вектор напряжённости может быть изображен в интересующей нас точке поля без наличия в этой точке пробного заряда, но определить направление и величину этого вектора можно, лишь пользуясь пробным зарядом.

На рис. 2.1 с помощью векторов напря-

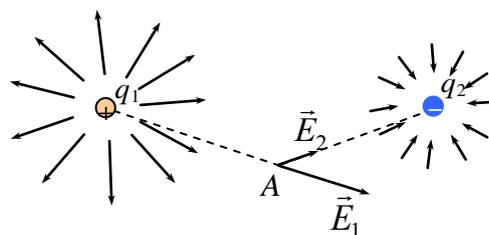


Рис. 2.1

жённости изображены поля двух зарядов: положительного заряда q_1 и отрицательного заряда q_2 , величина которого втрое меньше величины положительного заряда. Для меньшего заряда вектора напряжённости, взятые на прежних расстояниях, имеют втрое меньшую длину. Любое поле характеризуется бесконечно большим числом векторов напряжённости, так как в каждой точке поля напряжённость имеет свое значение и направление. Чтобы избежать необходимости изображать поле бесконечно большим числом векторов, М. Фарадей предложил использовать *силовые линии*. Проводят их так, чтобы векторы напряжённости в каждой точке были к ним касательными, а их направление совпадало с направлением векторов. Силовые линии будут характеризовать помимо направления еще и величину напряжённости, если условиться проводить их гуще там, где напряжённость поля больше. Например, если силовые линии параллельны друг другу и расстояние между ними одинаково, напряжённость во всех точках одна и та же. Такое поле ($\vec{E} = \text{const}$) называется *однородным*.

На рис. 2.2 поле изображено с помощью силовых линий. Показаны и силы, действующие на отрицательный и положительный заряды, помещенные в это поле. Они направлены по касательным к силовым линиям. В одном случае направление силы совпадает с направлением напряжённости, а в другом — противоположно ему. Очевидно, что величина и направление этих сил будут определяться равенством (2.1), но под q теперь следует понимать не пробный заряд, а тот заряд, который помещен в поле:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (2.2)$$

Если поле создано не одним зарядом, а несколькими, то напряжённость может быть найдена как сумма напряжённостей отдельных полей. Имеет место так называемый *принцип суперпозиции* (наложения): действие одного поля не зависит от наличия второго; поля накладываются друг на друга, не влияя одно на другое. Следует помнить, что речь идет о векторной сумме напряжённостей, так как напряжённость — векторная величина.

На рис. 2.3 изображены векторы напряжённости полей как положительного, так и отрицательного зарядов, показаны направление и величина суммарного вектора напряжённости.

Модуль суммарной напряжённости

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (2.3)$$

задается длиной вектора \vec{E} . Последняя может быть выражена через напряжённости \vec{E}_1 и \vec{E}_2 по теореме косинусов. Наличие прямого угла облегчит задачу и позволит найти модуль результирующей напряжённости либо по теореме Пифагора, либо через тригонометрические функции.

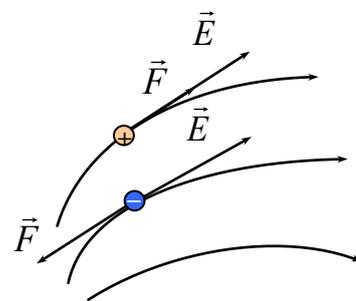


Рис. 2.2

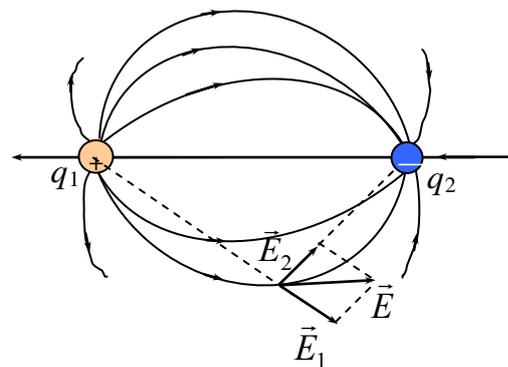


Рис. 2.3

Следует обратить внимание, что вектора \vec{E}_1 и \vec{E}_2 построены так, что совпадают с прямыми, соединяющими точку A , где ищется напряжённость, с зарядом, создающим соответствующее поле. Иначе говоря, эти вектора направлены так, как если бы каждый заряд был единственным, создающим поле в точке A (см. [рис. 2.1](#)). Суммарный вектор \vec{E} направлен по касательной к силовой линии суммарного поля.

Остается добавить, что на обсуждаемом рисунке изображено поле, создаваемое двумя одинаковыми по величине разноименными зарядами. Такая система зарядов называется *диполем*. Заметим, что одиночный заряд называют иногда *монополем* (сравните: монополь — диполь).

2.2. Закон Кулона. Вычисление напряжённости поля точечного заряда

Основным опытным законом электростатики является закон Кулона, установленный им для точечных зарядов, то есть для заряженных тел, размеры и форма которых не существенны по сравнению с расстоянием между ними. Один из зарядов был установлен Кулоном неподвижно в крутильных весах, а второй подвешен на нити, которая закручивалась под действием силы, возникающей между заряженными телами. Нанося на тела различные заряды, Кулон установил, что сила взаимодействия прямо пропорциональна величинам зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами:

$$F \sim \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}. \quad (2.4)$$

В полученном законе две величины известны из механики, и там же установлены единицы их измерения. Поэтому закон может быть использован для установления единицы измерения третьей входящей в закон величины — заряда. В системе СГСЭ принято считать единицу заряда равной такому заряду, который взаимодействует с равным себе, расположенным от него на расстоянии 1 см, с силой в 1 дину (дина — единица силы в этой системе, равная 10^{-5} Н, установлена по второму закону Ньютона). Тогда из (2.4) получим

$$q_1 = q_2 = q = \sqrt{Fr^2}, \text{ и единица измерения заряда } \underline{\text{в}} = \text{г}^{1/2} \text{см}^{3/2} \text{с}^{-1}. \quad (2.5)$$

Естественно, что при таком выборе единицы измерения заряда закон, установленный Кулоном, можно записать, заменив знак пропорциональности знаком равенства:

$$F = \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2} \quad \text{или} \quad \vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}, \quad (2.6)$$

где радиус-вектор \vec{r} направлен от q_1 к q_2 . Очевидно, что сила \vec{F} , действующая на заряд q_2 , направлена по \vec{r} , если заряды одного знака, и против \vec{r} , если заряды разноимённые.

В СИ дело обстоит иначе. Выше упоминалось, что в этой системе единица измерения заряда кулон (Кл) определяется не из закона Кулона, а через единицу силы тока ($1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}$) и составляет $3 \cdot 10^9$ установленных выше единиц СГСЭ. Получается, что единицы измерения всех трех, входящих в закон Куло-

на, величин определены заранее, значит два заряда по одному кулону каждый, расположенные на расстоянии одного метра друг от друга не будут взаимодействовать друг с другом с силой 1 ньютон, то есть необходимо ввести коэффициент пропорциональности:

$$F = K \frac{1\text{Кл} \cdot 1\text{Кл}}{1\text{м}^2}. \quad (2.7)$$

Чтобы найти силу взаимодействия зарядов, нужно знать коэффициент, стоящий в правой части. Он численно равен силе взаимодействия двух зарядов по 1 Кл, находящихся на расстоянии 1 м друг от друга. Для нахождения величины этой силы воспользуемся законом Кулона, записанным в системе СИ, подставив в него величины зарядов и расстояние в единицах системы СГСЭ:

$$F = \frac{3 \cdot 10^9 \text{СГСЭ}q \cdot 3 \cdot 10^9 \text{СГСЭ}q}{10^4 \text{см}^2} = 9 \cdot 10^{14} \text{дн} = 9 \cdot 10^9 \text{Н}, \quad (2.8)$$

т.е. в СИ коэффициент пропорциональности в законе Кулона $K = 9 \cdot 10^9 \text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$. В Международной системе единиц принято записывать коэффициент в виде дроби:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (2.9)$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{Кл}^2 / \text{Н} \cdot \text{м}^2$ называют электрической постоянной. Таким образом, в системе единиц СИ закон Кулона для модуля и вектора силы запишется следующим образом:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}; \quad \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^3} \cdot \vec{r}. \quad (2.10)$$

Закон Кулона (2.6) или (2.10), даёт возможность найти силу взаимодействия зарядов в отсутствие среды, т.е. в пустоте. Опыт показывает, что в среде взаимодействие зарядов уменьшается. В этом случае в знаменателе закона Кулона появляется *диэлектрическая проницаемость* ϵ — характеристика той среды, в которую помещены взаимодействующие заряды. Диэлектрическую проницаемость среды можно найти в физических таблицах. Её записывают обычно рядом с ϵ_0 — электрической постоянной. Несмотря на одинаковость обозначений, эти две величины имеют разный смысл: диэлектрическая проницаемость ϵ показывает, во сколько раз уменьшается сила взаимодействия зарядов в той среде, куда помещены заряды, то есть появление ее в знаменателе закона Кулона определяется не выбором системы единиц, а условиями задачи. Электрическая же постоянная ϵ_0 вводится только в системе СИ, является её признаком и никак не характеризует условия взаимодействия зарядов.

Используя закон Кулона, нетрудно найти величину напряжённости поля, созданного точечным зарядом q в любой точке этого поля. Помещая пробный заряд $q_{\text{пр}}$ в указанную в задаче точку поля, мы определяем направление вектора напряжённости (см. [рис. 2.1](#)) (Следует помнить, что начало вектора напряжённости должно лежать в той точке поля, в которой ищется напряжённость!). Те-

перь, воспользовавшись законом Кулона, можно найти силу взаимодействия пробного заряда с тем зарядом, который создает поле:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q| \cdot |q_{\text{пр}}|}{r^2}; \quad \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_{\text{пр}}}{r^3} \vec{r}. \quad (2.11)$$

Поделив обе части равенства на величину пробного заряда, как того требует определение напряжённости (2.1), получим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{r^2}; \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad (2.12)$$

где q — заряд, создающий поле, а \vec{r} — радиус-вектор, проведенный от заряда к точке, в которой определяется напряжённость.

Вычислять напряжённость, пользуясь выражениями (2.12) можно только тогда, когда заряд q — точечный. Но на практике точечные заряды встречаются редко. Значительно чаще приходится иметь дело с заряженными плоскостями, линиями, цилиндрами, шарами и т.п. Пример: между линией электропередачи и землей создается поле, оно подобно полю между линией и плоскостью. Ни то, ни другое заряженное тело нельзя принять за материальную точку, поэтому ни напряжённость, ни силу взаимодействия нельзя определить, прямо используя закон Кулона. Необходимо привлекать *принцип суперпозиции*, что требует разбиения протяжённых зарядов на малые элементы с последующим интегрированием векторной функции, что в большинстве случаев приводит к математическим осложнениям.

2.3. Теорема Остроградского — Гаусса

Заряд — величина скалярная, поэтому, переходя к неточечным зарядам легко представить каждый неточечный заряд алгебраической суммой точечных зарядов. Сложнее дело обстоит с напряжённостью. При ее суммировании придется иметь дело с векторами.

В векторном анализе существует теорема, позволяющая избежать этой трудоемкой задачи, заменив ее сложением скалярной величины. Речь идет о *теореме Гаусса*, которая позволяет вычислить скалярную величину — поток любого вектора через произвольно выбранную поверхность. Для начала запишем *поток вектора напряжённости*, следуя определению потока (1.2):

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{a} = Ed\alpha \cos\alpha \quad (2.13)$$

Напомним, что $d\vec{a}$ — элемент поверхности, а α — угол между нормалью к ней и вектором напряжённости. Как видим, понятие потока даёт возможность связать векторную величину — напряжённость, со скалярной — потоком.

Далее приводим формулировку и доказательство теоремы.

Поток вектора напряжённости электростатического поля через любую, но замкнутую поверхность, равен суммарному заряду Q , охватываемому этой поверхностью, делённому на $\epsilon\epsilon_0$:

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.14)$$

Докажем справедливость этого утверждения.

1. Рассмотрим сначала случай, когда Q — точечный заряд. Окружим его поверхностью произвольной формы и выделим на ней элемент $d\vec{a}$. И поверхность, и элемент $d\vec{a}$ изображены на рис. 2.4. Рис. 2.5 поясняет, что любой элемент da может быть заменен элементом, нормальным к силовой линии,

$$d\Phi = E da_n. \quad (2.15)$$

Равенство получено заменой в (2.13) произведения $da \cos\alpha$ на da_n . Правомер-

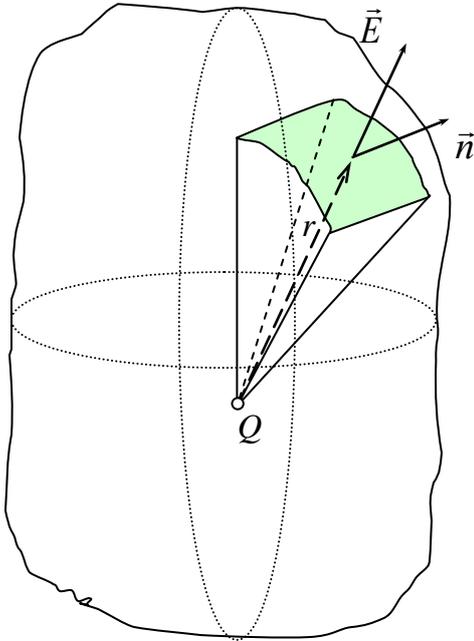


Рис. 2.4

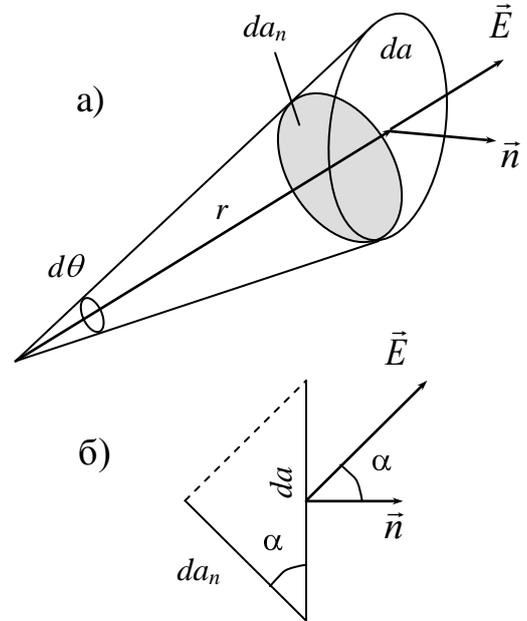


Рис 2.5

ность этого очевидна из рис. 2.5б, где элементы поверхности показаны сбоку.

Заменив в полученном выше равенстве напряжённость E её значением (2.12) для поля точечного заряда, получим

$$d\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} da_n. \quad (2.16)$$

Величину da_n можно заменить через элемент телесного угла $d\theta$, пользуясь известным из математики соотношением:

$$da_n = r^2 d\theta. \quad (2.17)$$

Справедливость последнего очевидна из рис. 2.5а. С увеличением r растет и элемент поверхности, взятый в том же телесном угле $d\theta$. Заменив da_n , получим

$$d\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} d\theta \quad (2.18)$$

или, интегрируя по полному телесному углу, равному 4π ,

$$\Phi = \int_0^{4\pi} \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} d\theta = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.19)$$

Теорема доказана для случая, когда внутри замкнутой поверхности (рис. 2.4) находится точечный заряд.

2. Теперь рассмотрим случай, когда внутри поверхности заключен заряд, нанесенный на тело произвольной формы. Его всегда можно рассматривать как сумму точечных зарядов:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots \quad (2.20)$$

Поток напряженности каждого из точечных зарядов может быть найден по теореме Гаусса:

$$\Phi_i = \frac{Q_i}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.21)$$

Общий поток в силу скалярности этой величины будет равен сумме потоков:

$$\Phi = \frac{Q_1}{\epsilon\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon\epsilon_0} + \dots + \frac{Q_n}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.22)$$

Заменяя в последнем равенстве сумму зарядов общим зарядом Q , заключенном в замкнутой поверхности, получим уравнение (2.14), то есть выражение, которое следовало доказать.

2.4. Применение теоремы Гаусса к вычислению напряженности поля заряженной плоскости и двух параллельных плоскостей

Наиболее типичными случаями, когда следует использовать теорему Гаусса, являются задачи нахождения напряженности поля заряженной нити, цилиндра, сферы, шара, плоскости. Чтобы применить теорему, прежде всего проводят замкнутую поверхность так, чтобы а) заряженное тело находилось *внутри* нее, б) *силовые линии* были *перпендикулярны* одной ее части и *параллельны* другой.

Выполнение первой части сформулированного выше правила построения вспомогательной поверхности диктуется необходимостью выполнения условия, оговоренного теоремой. Вторая часть, касающаяся взаимного расположения вводимой в задачу поверхности и силовых линий, из теоремы не следует.

Рассмотрим ее подробнее. Дело здесь в том, что, окружая заряды произвольной (как позволяет теорема) поверхностью, мы получаем возможность связать величину этих зарядов, тоже данную в задаче, с потоком через ту поверхность, которую мы выбираем сами. Ведь согласно теореме она может быть любой! Но при расчете полей существенно бывает знать не поток через любую поверхность, а напряженность поля, причем в конкретной точке. Поэтому наложим *первое ограничение* на вводимую теоремой поверхность: ее следует проводить через ту точку, в которой нас интересует напряженность. Далее, переходя от потока к напряженности, мы не можем пользоваться их связью в том виде, как она дана определением (2.13). Ведь в него входит элемент поверхности и поток через этот элемент, а не через всю замкнутую поверхность (см. [рис. 2.4](#)). Чтобы получить весь поток, следует взять интеграл по всей поверхности от обеих частей равенства:

$$\Phi = \int_a d\Phi = \int_a E da \cos \alpha. \quad (2.23)$$

Если нами выбрана поверхность произвольной формы, в правой части полученного равенства под интегралом оказывается три переменных. Избавиться от одной из них можно, если выбрать поверхность так, как рекомендовано выше: чтобы в замкнутой поверхности часть ее была перпендикулярна силовым линиям, а часть параллельна. Естественно, при этом значение косинуса будет либо ноль, либо единица. При этом весь поток через замкнутую поверхность можно представить суммой двух потоков, один из которых взят через перпендикулярную силовым линиям часть поверхности, второй — через параллельную:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \int_a E da_n + 0, \quad (2.24)$$

где da_n — элемент площади той части замкнутой поверхности, которая перпендикулярна силовым линиям.

В случае, если нормальная поверхность симметрична относительно заряженного тела, напряжённость постоянна в каждой ее точке и интегрирование дает простой результат, так как E можно вынести за знак интеграла.

Напомним, что всюду, начиная с формулировки теоремы (2.14) заряд, создающий поле, мы обозначали Q , чтобы отличить его от заряда q , попавшего в поле. Отметим, что в задачах это обычно не делается, и для любого заряда — и создающего поле, и попавшего в него — используется одно и то же обозначение.

Теперь перейдём к решению поставленной в заголовке задачи: найдём напряжённость в точках поля, расположенных на одинаковом расстоянии по обе стороны от плоскости площадью S , на которую нанесён заряд Q (рис. 2.6). Если заряд распределён равномерно, удобно пользоваться понятием *поверхностной плотности* зарядов $\sigma = q/S$, имеющий размерность Кл/м². В рассматриваемом примере ход силовых линий легко определить по движению пробных зарядов, мысленно помещаемых в поле этой плоскости. Силовые линии показаны на профильном изображении плоскости (см. рис. 2.6). Выполнены первые два условия, необходимые для расчёта напряжённости с помощью теоремы: а) изображен заряд; б) показаны силовые линии.

Следующий этап — выберем поверхность так, чтобы она заключала внутри себя часть зарядов и была замкнута. Удобнее, чтобы часть поверхности была бы параллельна силовым линиям, а часть перпендикулярна. Такой поверхностью будет цилиндр (либо параллелепипед), основания которого проходят через указанные точки, а боковая поверхность вырезает из заряженной поверхности S площадку s , равную по величине площади a_n каждого из оснований. Обратите внимание на то, что для обозначения площади использованы разные буквы: через s обозначена площадь поверхности, несущей на себе заряд; через a_n — площадь вспомогательной поверхности.

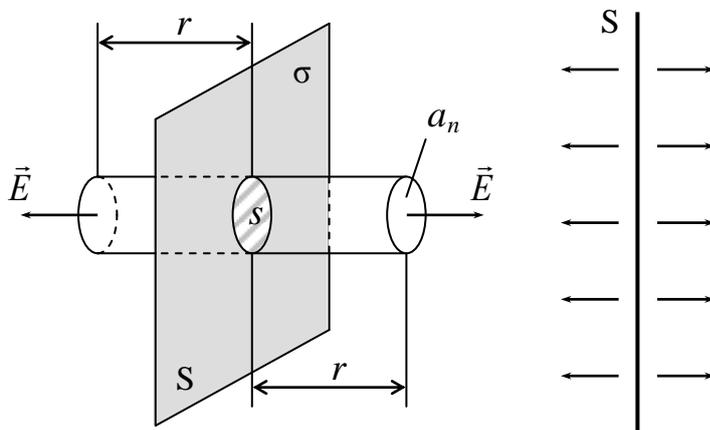


Рис. 2.6

Теперь мы имеем возможность, пользуясь теоремой, найти полный поток через выбранную поверхность, внутри которой заключён не весь заряд, а часть его, равная σs :

$$\Phi = \frac{\sigma s}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (2.26)$$

Свяжем поток через выбранную поверхность с напряжённостью поля в указанных точках. Естественно представить поток двумя слагаемыми:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2a_n E, \quad (2.27)$$

где Φ_1 — поток через боковую поверхность, равный нулю, поскольку силовые линии параллельны ей; Φ_2 — поток через основания цилиндра, перпендикулярные силовым линиям. Поскольку площадь каждого основания обозначена нами через a_n , получили записанный выше результат.

Приравнявая два последних выражения, учитывая равенство площадей внутренней части заряженной поверхности и оснований и равенство нулю потока через боковую поверхность, получим

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon \epsilon_0}. \quad (2.28)$$

Оказывается, поле заряженной плоскости однородно, то есть одинаково во всех его точках, не зависит от расстояния, как этого и следовало ожидать, судя по параллельности его силовых линий. На рис. 2.7 приведён график зависимости напряжённости от расстояния, взятого по силовой линии: напряжённость постоянна по величине и имеет разный знак по разным сторонам плоскости. Это обстоятельство приводит к тому, что напряжённость двух параллельных разноимённо заряженных с одинаковой плотностью плоскостей не равна нулю лишь в точках, расположенных между плоскостями. Величину напряжённости в этом случае нетрудно найти, рассмотрев её векторы на рис. 2.8. Они показаны в трёх точках: между параллельными плоскостями, справа и слева от них. Во всех случаях суммарная напряжённость находится по принципу супер-

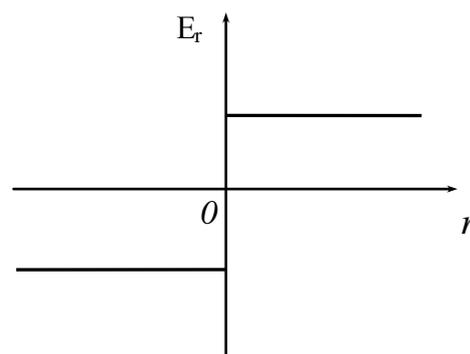


Рис. 2.7

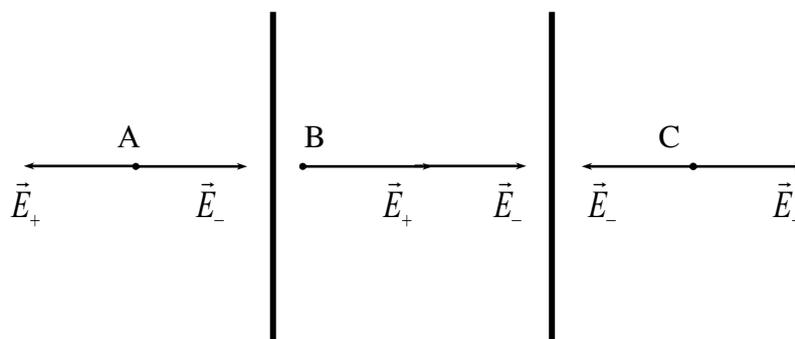


Рис. 2.8

позиции:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (2.29)$$

Из-за противоположного направления векторов эта сумма в точках A и C обращается в ноль, а в точке B удваивается:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.30)$$

Поле между двумя параллельными плоскостями тоже *однородное*.

2.5. Вычисление напряжённости поля заряженного шара

Пусть шар радиусом R_0 заряжен с объёмной плотностью $\rho = Q/V$, которая постоянна по всему его объёму V . Найдём напряжённость внутри шара, на его поверхности и вне его (рис. 2.9). Рассматриваемый пример весьма наглядно позволяет понять, что построение вспомогательной поверхности определяется поставленной задачей. Заряд, находящийся внутри этой поверхности, тоже от неё зависит. Итак, найдём вначале напряжённость на расстоянии $r_1 < R_0$ от центра шара. Решение начинаем с построения силовых линий, направленных по силе, действующей на пробный заряд, вносимый в различные точки поля.

Очевидно, они будут расходящимися линиями, имеющими начало в центре шара. Значит, вспомогательная поверхность должна иметь форму сферы произвольного радиуса r_1 . Она перпендикулярна силовым линиям и проходит через точку, в которой определяется напряжённость.

Внутри этой сферы будет находиться не весь заряд шара, а лишь часть его, равная $\rho \frac{4}{3} \pi r_1^3$, то есть заряд внутри равен объёмной плотности заряда, умноженной на объём шара радиусом r_1 . Согласно теореме Гаусса поток через эту сферу

$$\Phi = \frac{\rho 4\pi r_1^3}{3\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.31)$$

Связь напряжённости с потоком через проведённую поверхность сферы может быть записана с учётом её перпендикулярности силовым линиям:

$$\Phi = E 4\pi r_1^2. \quad (2.32)$$

Приравняв потоки, получим формулу для вычисления напряженности:

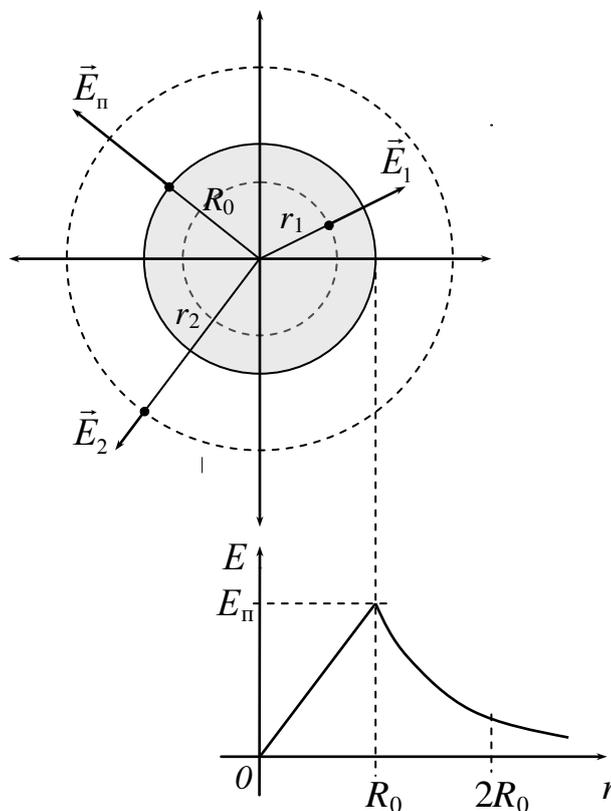


Рис. 2.9

$$E = \frac{\rho r_1}{3\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.33)$$

Напряжённость поля оказалась прямо пропорциональной расстоянию от центра шара, отмеряемому по силовой линии. На графике (см. [рис. 2.9](#)) по оси абсцисс отложено расстояние r от центра шара, и проведена прямая, характеризующая зависимость $E(r)$ для рассматриваемого случая $r < R_0$.

Теперь найдём напряжённость на поверхности шара. Проведённая для этого вспомогательная поверхность совпадает с поверхностью шара, а внутри неё будет находиться заряд $\rho \frac{4}{3} \pi R_0^3$. Теорема Гаусса будет выглядеть так:

$$\Phi = \frac{\rho 4\pi R_0^3}{3\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.34)$$

Поток через выбранную поверхность также изменится:

$$\Phi = E_{\text{п}} 4\pi R_0^2, \quad (2.35)$$

где $E_{\text{п}}$ — напряжённость теперь уже на поверхности шара. Приравняв потоки, получим

$$E_{\text{п}} = \frac{\rho R_0}{3\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.36)$$

Значение $E_{\text{п}}$ отложено на графике, задавая ту точку, которая ограничивает рост напряжённости внутри шара по мере увеличения расстояния от его центра.

Наконец найдём напряжённость поля вне заряженного шара, то есть для точек, находящихся от центра шара на расстоянии $r_2 > R_0$. Проводя вспомогательную поверхность через точку на расстоянии r_2 от центра (см. [рис. 2.9](#)), убеждаемся, что она, как и в первых двух случаях, имеет форму сферы и перпендикулярна всюду силовым линиям. Внутри неё будет заключён весь заряд шара, и теорема Гаусса будет выражена, как и во втором случае, уравнением (2.34) с той лишь разницей, что в качестве радиуса сферы выступает r_2 .

$$\Phi = E 4\pi r_2^2. \quad (2.37)$$

Совмещая (2.34) с полученным выше равенством будем иметь

$$E = \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon\epsilon_0 r_2^2}. \quad (2.38)$$

Напряжённость вне заряженного шара убывает пропорционально квадрату расстояния r от центра, и на $r = 2R_0$ будет в четыре раза меньше максимальной.

2.6. Работа электростатических сил. Потенциальность поля

Вводя понятие напряжённости (2.1), мы связали её с величиной механической силы \vec{F} , появляющейся при внесении любого заряда в электростатическое поле. Если заряд не закреплен, то под действием этой силы он будет перемещаться, и сила будет совершать работу.

На рис. 2.10 показано поле точечного заряда Q , в котором перемещается другой точечный заряд q . По определению, работа по его бесконечно малому

перемещению $d\vec{l}$ может быть найдена как скалярное произведение силы \vec{F} , совпадающей по направлению с напряжённостью, на это перемещение:

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = q\vec{E}d\vec{l} = qEdl \cos \alpha. \quad (2.39)$$

Нетрудно заметить (см. рис. 2.10), что $dl \cos \alpha \approx dr$ — изменению расстояния между зарядами, взятому по силовой линии. Тогда элементарная работа поля:

$$dA = qE dr, \quad (2.40)$$

т.е. работа электрического поля не зависит от траектории, по которой перемещается заряд q , а определяется лишь изменением расстояния между зарядами. Это очень важное свойство электростатического поля сохраняется и при конечных перемещениях (не бесконечно малых).

Покажем это на примере поля точечного заряда Q , вычислив работу этого поля при перемещении в нём другого точечного заряда q из точки 1 в точку 2 (см. рис. 2.10):

$$A = \int_{r_1}^{r_2} q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_2}, \quad (2.41)$$

где r_1 и r_2 соответственно начальное и конечное расстояние заряда q от создающего поле заряда Q . Таким образом, работа по перемещению заряда в поле другого заряда может быть выражена как разность двух величин, определяющих потенциальную энергию взаимодействия этих зарядов в крайних точках.

На рис. 2.11 показано перемещение заряда под действием поля по двум кривым l_1 и l_2 . Из-за того, что начальные и конечные точки их одинаковы, равны и работы по перемещению зарядов по этим кривым. Если же заряд будет перемещаться по замкнутому контуру, как это показано стрелкой внутри контура, то работа на участке l_1 будет положительной, поскольку совершается силами системы, а на участке l_2 — отрицательной (против сил системы). Вся работа по замкнутому контуру будет равна нулю. Последнее следует и из общих соображений закона сохранения энергии и невозможности вечного двигателя. Действительно: пусть при перемещении заряда по замкнутому контуру силы поля совершают положительную работу A , но при этом вся система возвращается в первоначальное состояние. Повторяя этот обход произвольное число раз, мы всякий раз совершали бы работу без изменения энергии системы, т.е. осуществили бы вечный двигатель.

Работу по рассматриваемому контуру можно вычислить интегрируя (2.39):

$$A = \oint q\vec{E}d\vec{l} = q \oint E dr, \quad (2.42)$$

что приводит к равенству, которое выражает потенциальность электростатического поля:

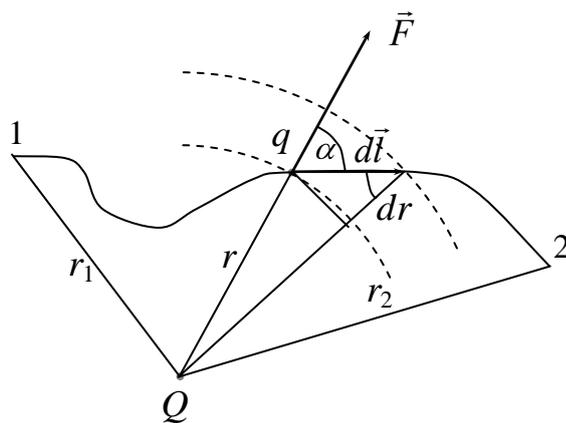


Рис. 2.10

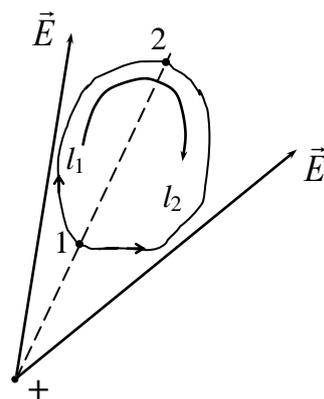


Рис. 2.11

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \text{либо} \quad \oint E dr = 0. \quad (2.43)$$

В физике и теории поля все поля делят на два типа: *потенциальные* и *вихревые*. Отличительным признаком потенциальных полей являются как раз то, что выше мы отметили у электрического поля: независимость работы от формы пути и, как следствие, равенство нулю работы по замкнутому контуру, т.е. её независимость от длины пути. Приведённые выше рассуждения справедливы для любого поля, а не только для точечного. Любой заряд может быть представлен суммой точечных зарядов, а его поле есть сумма полей точечных зарядов. Очевидно, что сумма потенциальных полей есть тоже поле потенциальное.

Заканчивая этот вопрос, мы предлагаем каждому убедиться, что на приведённых выше рисунках поле может быть принято за элемент поля заряженной сферы, шара, нити. В последнем случае рисунок даёт картину силовых линий при её изображении сверху. Заметим ещё, что электрическое поле — не единственное потенциальное поле, известное нам из пройденного уже курса физики. Работа по замкнутому контуру равна нулю (не зависит от формы пути) ещё и для *поля тяготения*. Это поле, как нам известно, тоже способно совершать работу по перемещению тела.

Рассмотрим пример. Пусть тело массой m поднято над поверхностью Земли на высоту h (рис. 2.12). Работа, совершённая против силы тяжести, пошла на увеличение потенциальной энергии тела, равное этой работе. Если потенциальная энергия тела у подножия наклонной плоскости была равна нулю, то в случае, когда оно поднято на высоту h , эта энергия будет равна mgh .

Поднимая это же тело по наклонной плоскости, мы получаем выигрыш в силе: для подъёма теперь достаточно силы, равной $mg \sin \alpha$ (на тело действуют две силы — $m\vec{g}$ и \vec{N} , а упомянутая сила есть

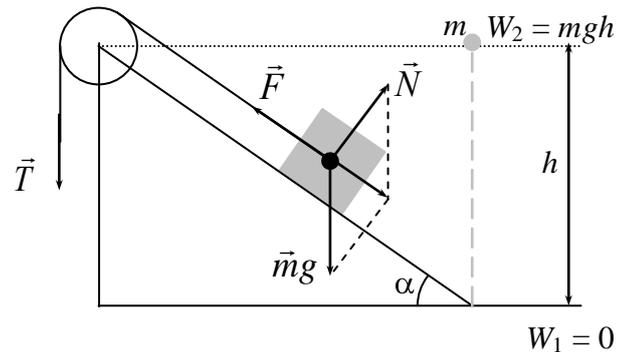


Рис. 2.12

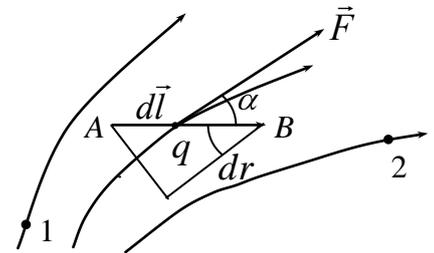
их сумма). Но работа по поднятию груза остаётся прежней, так как путь $l = h/\sin \alpha$ увеличивается во столько же раз, во сколько раз уменьшается сила. Поэтому, поднимая тело массой m вдоль наклонной плоскости, мы увеличим его потенциальную энергию на ту же самую величину, что и раньше. *Никакой механизм не позволяет получить выигрыш в работе при перемещении тела относительно Земли.* Последнее положение известно в физике давно и названо *золотым правилом механики*.

Тот факт, что работа сил тяготения (или против них) не зависит от формы траектории, а определяется лишь конечной и начальной точками, эквивалентен утверждению: работа по замкнутому контуру в поле тяготения равна нулю. Следует обратить внимание ещё на то, что равенство нулю потенциальной энергии у основания плоскости весьма условно: потенциальная энергия взаимодействия определяется с точностью до произвольной постоянной. Например, если за нуль

принять потенциальную энергию взаимодействия Земли и тела массой m на бесконечно большом расстоянии, то на поверхности Земли она будет равна $-\gamma \frac{mM}{R}$, где R — радиус Земли. Но практически эта величина никогда не учитывается, поскольку работа от нее не зависит, а определяется взятым с противоположным знаком изменением энергии: когда работа по поднятию груза совершается внешними силами, ΔW положительно (энергия возрастает), когда опускающийся груз совершает работу, энергия уменьшается и приращение ΔW отрицательно.

2.7. Потенциал электростатического поля. Связь напряженности с потенциалом

Потенциальность электростатического поля позволяет ввести еще одну его характеристику, тесно связанную с работой, которую это поле может совершать. Для её введения рассмотрим поле, в которое внесен пробный положительный заряд $q = q_{\text{пр}}$, перемещающийся под действием поля из точки A в точку B (рис. 2.13). Работа по его перемещению будет положительна, т.к. ее производят силы системы. Потенциальная энергия заряда в точке A будет больше, нежели в точке B , поскольку за счет ее убыли произведена работа



$$dA = -dW, \quad (2.44)$$

Рис. 2.13

где dW — приращение энергии заряда в процессе его перемещения. Работа определяется положением начальной и конечной точек перемещения $d\vec{l}$, а именно разностью энергий заряда q в этих точках. Величина энергии зависит не только от поля в этой точке, но и от величины заряда q , в нее внесенного.

Назовем *потенциалом* ϕ точки поля потенциальную энергию единицы заряда, помещённого в эту точку:

$$\phi = \frac{W}{q_{\text{пр}}}. \quad \text{Тогда приращение потенциала} \quad d\phi = \frac{dW}{q_{\text{пр}}}. \quad (2.45)$$

Потенциал не будет зависеть от величины пробного заряда, и, следовательно, будет характеризовать точку поля, будет являться *характеристикой поля в этой точке*.

Сопоставив равенства (2.44) и (2.45) получим

$$dA = -qd\phi, \quad (2.46)$$

то есть изменение потенциала можно определить как взятую с противоположным знаком работу по перемещению единичного пробного заряда. Для электростатического поля, так же, как и для поля тяготения, абсолютное значение потенциала в данной точке несущественно для нахождения работы по перемещению заряда. Важно знать его изменение. Как и при введении понятия напряженности, в приведенных выше равенствах фигурирует пробный (условлено, что это положительный) заряд. Слово «пробный» означает, что заряд лишь вводят на

время в поле, и, определив требуемые параметры, убирают. Но равенствами (2.45) и (2.46) можно пользоваться во всех случаях, когда необходимо вычислить энергию либо работу по перемещению любого заряда, помещенного в поле. Знак заряда, естественно, тоже может быть любым.

Интегрируя (2.46), нетрудно найти работу A по перемещению заряда между двумя точками поля с потенциалами φ_1 и φ_2 :

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU. \quad (2.47)$$

Здесь $U = (\varphi_1 - \varphi_2)$ — *напряжение* между двумя точками поля, которое равно взятой с обратным знаком разности потенциалов этих точек. В отличие от *напряженности*, которая является *силовой характеристикой* поля, *потенциал* — это *энергетическая характеристика* поля. Потенциал — скалярная величина.

Так же, как сила в механике связана с энергией (работой), так и напряженность связана с потенциалом. Остановимся на этой связи.

Пусть электростатическое поле задано силовыми линиями (см. рис. 2.13). Заряд перемещается из т. A в т. B по $d\vec{l}$. При этом поле производит работу

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = Eqdl \cos \alpha, \quad (2.48)$$

или, как следует из чертежа,

$$dA = qE dr, \quad (2.49)$$

где dr проведено вдоль силовой линии, и из точки A на него опущен перпендикуляр. Учитывая (2.46), получим:

$$-q d\varphi = Eq dr, \quad (2.50)$$

откуда следует формула связи между напряженностью и потенциалом:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}, \quad (2.51)$$

где $\frac{d\varphi}{dr}$ — изменение потенциала на единицу длины, взятой по силовой линии, а E_r — проекция вектора напряженности на координату r . Знак минус означает, что положительному значению напряженности соответствует отрицательное значение $d\varphi$, то есть в направлении силовых линий потенциал убывает. Выражение (2.51) получено для случая, когда координата r направлена по вектору напряженности, и проекция \vec{E} на эту координату равна модулю вектора \vec{E} . В общем же случае в левой части (2.51) вместо модуля следует записывать проекцию вектора \vec{E} на соответствующую ось координат: $E_x = -\partial\varphi/\partial x$; $E_y = -\partial\varphi/\partial y$; $E_r = -\partial\varphi/\partial r$ и т. д.

2.8. Эквипотенциальные поверхности. Вычисление потенциала

Равенство (2.51) занимает в электростатике особое место, поэтому есть смысл обсудить его подробнее. Прежде всего, оно служит основанием для того, чтобы определять характер изменения потенциала по ходу силовых линий, которые, как мы уже успели заметить, всегда начинаются на положительных зарядах. Нетрудно показать, что по силовым линиям можно представить и форму поверхностей уровня, или *поверхностей равного потенциала* (см. 1.1, п. 3). Эти

поверхности ($\varphi = \text{const}$) называют *эквипотенциальными*. Они всегда перпендикулярны силовым линиям. Покажем это.

Пусть заряд перемещается в поле отрицательно заряженного шара по элементу траектории $d\vec{l}$ (рис. 2.14). Работа по перемещению заряда может быть найдена двумя способами: по напряжённости (2.48) и по изменению потенциала (2.46). Приравняем правые части этих равенств:

$$Eqdl\cos\alpha = qd\varphi \quad (2.52)$$

Если предположить, что $d\vec{l}$ — элемент *эквипотенциальной поверхности*, то $d\varphi = 0$ в силу постоянства на ней потенциала. В левой части равенства в нуль может обратиться лишь косинус, если угол между силой \vec{F} и перемещением $d\vec{l}$ будет прямым. Значит, эквипотенциальные поверхности должны быть перпендикулярны силовым линиям, по которым направлена напряженность. Для взятого в качестве примера поля заряженного шара эквипотенциальные поверхности будут концентрическими сферами, потенциал которых убывает по мере приближения к шару (потенциал убывает в направлении силовых линий).

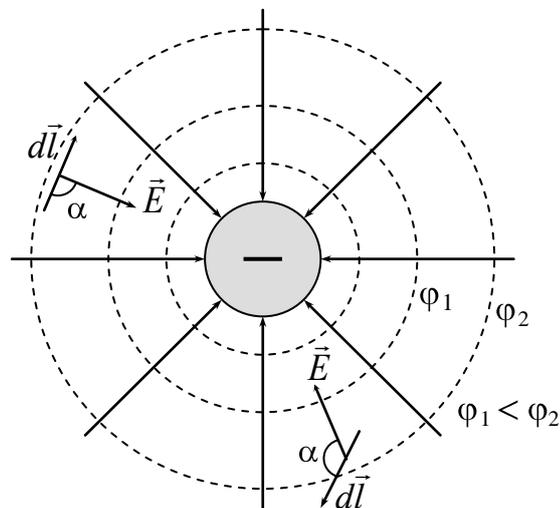


Рис. 2.14

В разделе 1.1, посвященном элементам векторной алгебры, было введено понятие градиента, как вектора, направленного по нормали к эквипотенциальной поверхности и показывающего направление максимального возрастания скалярной величины. В (2.51) dl , равное dr , взято по силовой линии, т.е. перпендикулярно эквипотенциальной поверхности. Значит, напряженность следует считать градиентом потенциала, взятым с обратным знаком. Иначе: *вектор напряженности показывает направление максимальной убыли потенциала*. Естественно, рассматривая трехмерный случай, можно напряженность представить в виде суммы проекций (1.10).

Прежде, чем перейти к расчёту потенциала или полей различных зарядов, уместно подвести некоторый итог: электростатическое поле имеет всего две характеристики: силовую (напряженность) и энергетическую (потенциал). Знание любой из них позволяет рассчитать работу по перенесению заряда в поле. Если к перечисленным выше физическим величинам добавить еще силу и энергию, то мы получим весь спектр величин, входящих в задачи по электростатике. Все они связаны друг с другом и вычисляются одна через другую. Но эта связь несколько иная для случая, когда поле создано точечным зарядом, по сравнению с той, когда заряд, создающий поле, нанесен на тело любой другой формы. В первом случае можно пользоваться законом Кулона, во втором — прямое его использование исключается. Попытаемся проиллюстрировать эту разницу двумя схемами, показывающими связь перечисленных величин для двух случаев.

Каждый последующий член в этих схемах вычисляется через предыдущий. Обратим внимание не только на различие этих случаев, но и на положение потенциала на каждой из приведённых ниже схем.

Для полей точечных зарядов последовательность расчёта физических величин через заряд Q , создающий поле, такова:

$$\begin{array}{ccccccc}
 Q & \rightarrow & F & \rightarrow & E & \rightarrow & \varphi \\
 & & \searrow & & \downarrow & & \swarrow \\
 & & & & & & (A, W)
 \end{array}, \tag{2.53}$$

и для поля, созданного зарядом любой формы:

$$\begin{array}{ccccccc}
 Q & \rightarrow & \Phi & \rightarrow & E & \rightarrow & \varphi. \\
 & & \downarrow & \searrow & \downarrow & & \\
 & & & & & & (F, A, W)
 \end{array} \tag{2.54}$$

Разница в нахождении напряжённости в этих двух случаях очевидна, так же как и тот факт, что *потенциал поля любого заряда может быть найден только через напряжённость* интегрированием уравнения (2.51). Рассмотрим, как это делается на конкретных примерах.

Пример 1. Пусть задана положительно заряженная сфера радиуса R_0 , с поверхностной плотностью зарядов σ . Требуется найти потенциал поля в точке, расположенной на расстоянии R_1 от её центра (рис. 2.15). Интегрируем (2.51), записанное с точностью до знака (ведь знак определяет направление изменения потенциала, а оно нам будет известно по ходу силовых линий, указанных на рисунке):

$$\int_0^{\varphi_1} d\varphi = \int_{\infty}^{R_1} E dr. \tag{2.55}$$

Поясним, как были выбраны пределы интегрирования: в задаче требуется найти не разность потенциалов, а потенциал, поэтому нижний предел в левой части равен нулю. Соответственно в правой части, где интегрирование ведётся по переменной r , нижний предел равен бесконечности, так как потенциал обращается в ноль там, где нет поля. Стоящая под интегралом напряжённость не постоянна, меняется при изменении расстояния r от центра сферы, поэтому, прежде чем приступить к интегрированию, её следует выразить в функции этого расстояния.

Задача нахождения потенциала свелась к нахождению напряжённости. Такая

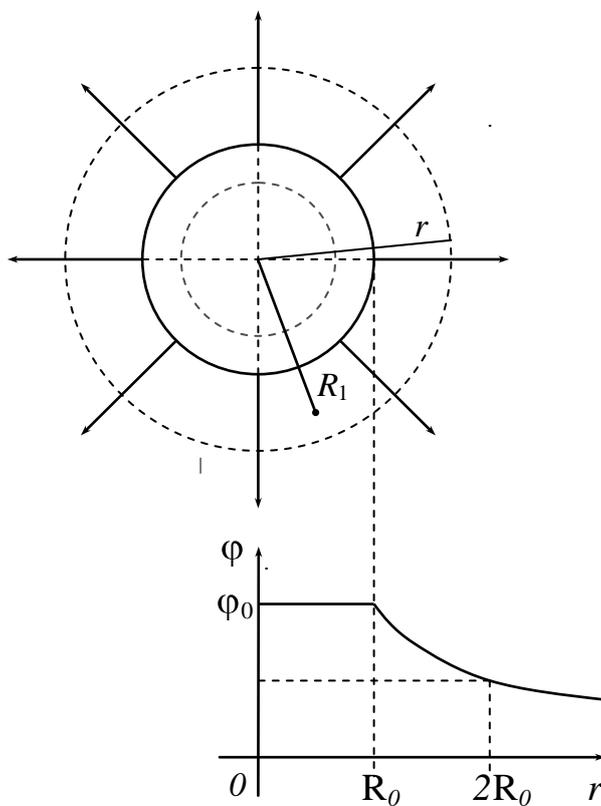


Рис. 2.15

ситуация является *общей* для полей, созданных зарядами *любой* формы. Напряжённость необходимо находить каждый раз соответственно форме заряда, заданного в задаче. Поскольку в рассматриваемом случае заряд не точечный, будем следовать схеме (2.54) и искать напряжённость через её поток Φ . Последний может быть найден по теореме Гаусса. Заряд и силовые линии поля изображены на [рис. 2.15](#). Здесь же пунктиром проведена вспомогательная поверхность — сфера произвольного радиуса r , заключающая внутри себя заряды, создающие поле. Заметим, что она не проходит через заданную точку поля R_1 , а имеет радиус, величина которого лежит между пределами, указанными в (2.55). Дело в том, что мы ищем напряжённость не в точке R_1 . Найденное нами выражение для напряжённости пойдёт под интеграл и, следовательно, радиус поверхности не должен быть фиксированным, тогда и напряжённость будет выражена в функции переменного радиуса, а не будет являться напряжённостью в фиксированной точке! Проведя поверхность, мы теперь можем записать теорему Гаусса, то есть определить полный поток через эту поверхность:

$$\Phi = \frac{\sigma 4\pi R_0^2}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (2.56)$$

Выразив поток через напряжённость, по определению потока

$$\Phi = E(4\pi r^2), \quad (2.57)$$

и приравняв потоки, получим значение напряжённости. Подставив его под интеграл, будем иметь

$$\varphi_1 = \frac{\sigma R_0^2}{\epsilon \epsilon_0} \int_{\infty}^{R_1} \frac{dr}{r^2}. \quad (2.58)$$

Или окончательно:

$$\varphi_1 = \frac{\sigma R_0^2}{\epsilon \epsilon_0 R_1}, \quad (2.59)$$

где φ_1 — потенциал в точке, находящейся на расстоянии R_1 от центра заряженной сферы. С увеличением этого расстояния потенциал уменьшается.

Решение легко использовать для нахождения потенциала в точках, лежащих на самой заряженной поверхности. В этом случае изменится лишь верхний предел в правой части интегралов (2.55) и (2.58), что приведёт к замене в выражении для потенциала R_1 на R_0 . Потенциал на поверхности заряженной сферы оказывается величиной постоянной.

Для вычисления потенциала внутри заряженной сферы вспомогательную поверхность следует проводить через любую точку, отстоящую от центра на расстояние $R_2 < R_0$. Поскольку она не будет внутри себя содержать заряд, поток Φ будет равен нулю, и уравнение (2.57) даёт такой результат:

$$E(4\pi r^2) = 0; \Rightarrow E = 0, \quad (2.60)$$

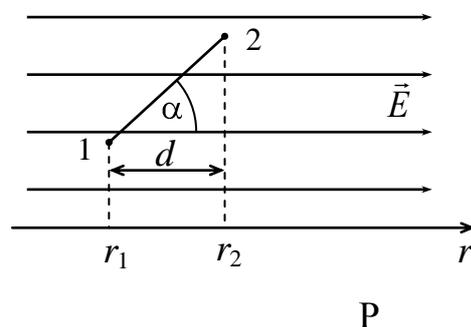
т.е. напряжённость внутри заряженной сферы равна нулю. Потенциал, связанный с ней равенством (2.51), будет постоянен по всей сфере радиуса R_0 и равен потенциалу на поверхности сферы. На [рис. 2.15](#) приведён график зависимости

потенциала от расстояния: от 0 до R_0 он не меняется, а начиная с $r = R_0$ убывает с увеличением расстояния от центра сферы по уравнению (2.59).

Пример 2. Пусть задано теперь *однородное* поле, напряжённость которого равна E . Требуется найти напряжение между двумя точками этого поля, находящимися на расстоянии l друг от друга (рис. 2.16).

Вдоль силовых линий показана ось r . Как и прежде, задача решается интегрированием (2.51), записанным с точностью до знака:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \int_{r_1}^{r_2} E dr; \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = E(r_2 - r_1). \quad (2.61)$$



Разность потенциалов и есть искомое напряжение. В силу постоянства напряжённости решение задачи не потребовало нахождения её значения, она была вынесена за интеграл. Разность координат r_2 и r_1 может быть заменена через d , и тогда получится известная из школьного курса физики формула:

$$U = Ed. \quad (2.62)$$

При необходимости вместо d можно ввести l , если известен угол α .

2.9. Проводники в электрическом поле

Электрический ток возникает, когда напряжённость поля внутри вещества становится отличной от нуля. Но его возникновение имеет место далеко не во всех веществах. При наложении поля ток возникает в металлах, водных растворах кислот и щелочей и, при определённых условиях, в газах, то есть в *проводниках*. Оставив пока в стороне признак, по которому вещества делят на классы проводников и диэлектриков, рассмотрим более подробно особенности их реакции на внешнее по отношению к ним электрическое поле.

Целым рядом специально поставленных опытов было установлено, что внутри металла электроны могут свободно перемещаться по всему объёму. Одним из таких опытов был опыт по обнаружению инерции электронов. Оказалось, что электрический ток возникает в момент резкого торможения быстро вращающейся катушки, так как электроны продолжают двигаться по инерции. О том, что свободными являются именно они, свидетельствовало направление возникшего тока.

Современная электронная теория объясняет наличие свободных электронов в металлах отщеплением валентных, наиболее слабо связанных с ядром, электронов в тот момент, когда металл переходит из газообразного состояния в жидкое либо твердое. Оставшиеся после отщепления электронов ионы образуют кристаллическую решетку, в промежутках которой беспорядочно движутся электроны.

Концентрация свободных электронов внутри металла очень велика, ее порядок сравним с числом Авогадро. Понятие о последнем позволяет легко нахо-

дить *концентрацию атомов* вещества по его плотности ρ и молярной массе μ . Зная валентность, можно определить, сколько электронов отщепилось от каждого атома, т.е. оценить их концентрацию.

Пусть N — общее число атомов в объеме V , тогда концентрация

$$n = \frac{N}{V} = N_0 \frac{m}{\mu V} = \frac{N_0 \rho}{\mu}, \quad (2.63)$$

где N_0 — число Авогадро; $\frac{m}{\mu}$ — число молей; ρ — плотность вещества.

Если взять табличные значения для меди ($\rho = 8,9 \text{ г/см}^3$, $\mu = 64 \text{ г/моль}$), то концентрация атомов получится около 10^{22} см^{-3} . Поскольку медь одновалентна, то на один атом приходится один валентный электрон, и концентрация свободных электронов будет такой же. Для алюминия она будет втрое выше, поскольку он трёхвалентен. Сколь угодно слабое внешнее электрическое поле вызывает движение электронов в направлении против поля (электроны отрицательны!). В результате перемешанные ранее положительные и отрицательные заряды будут разделены: положительные останутся на месте, отрицательные сместятся против поля. Если проводник в это время разделить пополам, то части его останутся заряженными, даже если поле убрать. Заряд исчезнет, как только соединим части проводника: тепловое движение перемешает заряды.

Явление разделения зарядов в проводнике, внесённом в электрическое поле, носит название *электростатической индукции*. Явление имеет важное следствие: индуцированные заряды, разойдясь в противоположные концы, создают индуцированное поле, которое направлено *против* внешнего поля (рис. 2.17). Смещение свободных зарядов проводника из-за их множества будет происходить до тех пор, пока поле внешнее и поле индуцированное не сравняются, а напряжённость внутри проводника, помещенного в поле, не станет равна нулю.

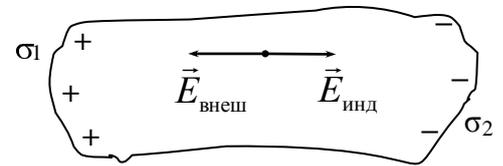


Рис. 2.17

Это свойство используется для электростатической защиты: прибор, который нужно изолировать от внешних электрических полей, помещают в металлический кожух, который может быть выполненным и из металлической сетки. Внутри этой сетки поле всегда равно нулю. Вследствие этого потенциал будет постоянен по всему объему проводника. Действительно, если внутри проводника $E = 0$, то по (2.51) $d\phi = 0$, а это означает, что $\phi = \text{const}$.

Если заряды нанесены на проводник, они, в силу своей подвижности, разойдутся на максимально возможное расстояние, то есть распределятся по поверхности. Движение зарядов и в этом случае прекратится только тогда, когда напряжённость поля, созданная зарядами, распределившимися по поверхности, станет равной нулю. Потенциал проводника вновь оказывается постоянным по всему объему проводника и равным его значению на поверхности. Силовые линии в любой точке будут ей перпендикулярны, как всякой эквипотенциальной поверхности.

Заряды, принесённые внутрь проводника, будут полностью выходить на его поверхность. Это свойство используется для создания очень больших потенциалов в линейных ускорителях элементарных частиц, поскольку кинетическая энергия движущейся в электрическом поле заряженной частицы определяется разностью потенциалов, которую она прошла. Электроды выполняют в виде полых сфер (*генератор Ван-де-Граафа*) как можно большего радиуса, и наносят на них заряды изнутри. Заряды расходятся по поверхности, а внутри сферы напряжённость остаётся равной нулю. Поверхность сфер делается как можно более гладкой, чтобы затруднить стекание зарядов с острых выпуклостей рельефа поверхности.

2.10. Ёмкость. Конденсаторы

Понятие электроёмкости не отличается по своей сути от того понятия, которое мы вкладываем в слово "ёмкость". Электроёмкость характеризует способность тела вмещать электрические заряды. Опыт показывает, что разные тела способны воспринять различный электрический заряд. Ёмкость тела зависит, прежде всего, от его размеров и формы. Речь здесь идет не о любом теле, а о металлических проводниках. Поскольку потенциал имеет постоянное значение по всему объему проводника, можно говорить о потенциале проводника. Ёмкость тела можно найти как отношение заряда тела к его потенциалу:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (2.64)$$

Это отношение, т.е. электроёмкость, не зависит от q и φ , и определяется только размерами, формой проводящего тела и диэлектрической проницаемостью среды, в которую погружён проводник. Последнее равенство является определением ёмкости уединенного проводника. Измеряется ёмкость в фарадах (Ф) в системе единиц СИ и в сантиметрах (см) в системе СГСЕ.

Если проводник не уединен, то потенциал, который он приобретает при сообщении ему определенного заряда, зависит от формы и присутствия других проводников. Происходит это благодаря упомянутому выше явлению электростатической индукции — перераспределения зарядов под действием внешнего поля. В результате индукции ёмкость меняется, точнее — увеличивается.

Конденсатором мы называем совокупность тел, служащих для накопления электрических зарядов. Конденсатор обычно имеет две пластины. Форма пластин может быть различной — сферической, цилиндрической, плоской. По форме пластины различают и тип конденсатора. Если заряжается одна пластина, заряд второй наводится через влияние первой, поэтому вторая пластина будет иметь такой же заряд, но противоположного знака. Ёмкость конденсатора можно найти как отношение заряда одной пластины к разности потенциалов (напряжению) между пластинами:

$$C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{q}{U}. \quad (2.65)$$

Для вычисления ёмкости уединенного проводника используют выражение (2.64), для вычисления ёмкости конденсатора — формулу (2.65). Расчет ёмкости тела или конденсатора сводится к вычислению его потенциала, либо разности потенциалов.

Рассмотрим пример. Вычислим ёмкость плоского конденсатора. Сначала находим напряжение по (2.51). Для этого проведём ось r и обозначим координаты пластин на ней 0 и d (рис. 2.18). Тогда

$$U = \int_0^d E dr = Ed, \quad (2.66)$$

т.к. поле в плоском конденсаторе однородное. Заменяя значение q через поверхностную плотность, а напряжённость ее значением для плоского конденсатора по (2.30) и подставляя в (2.65), получим

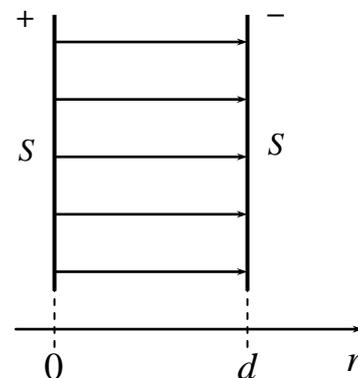


Рис. 2.18

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}. \quad (2.67)$$

Как и следовало ожидать, ёмкость определяется размерами конденсатора. Кроме того, наличие среды между пластинами может увеличить ёмкость в ϵ раз.

Форма пластин существенно влияет на значение напряжённости поля, и, следовательно, разности потенциалов. В итоге меняется и ёмкость конденсатора. Вычисление последней для *уединенной сферы*, *цилиндрического* и *сферического* конденсаторов мы оставляем читателю. Разница с приведённым примером будет лишь в том, что вычисление напряжённости в этих трех случаях пойдёт по схеме (2.54), которой нам не было нужды пользоваться из-за однородности поля плоского конденсатора. Кроме того, напряжённость нельзя будет выносить за знак интеграла, поскольку в этих случаях она зависит от координаты.

2.11. Энергия электрического поля

Электростатическое поле, как и любой вид материи, должно обладать энергией. Найти эту энергию можно по величине работы, идущей на создание поля. Пусть поле создается так: имеются две пластины, параллельные друг другу. Обе пока не заряжены, поля нет, и его энергия равна нулю. Начнём заряжать конденсатор, убавляя на dq заряд одной из его пластин, и перенося dq на другую. При этом одна пластина заряжается положительно, а другая отрицательно, и возникает поле, которое заключено между пластинами конденсатора.

Работа, которая совершается при переносе заряда dq , может быть найдена по (2.46):

$$dA = dq(\varphi_2 - \varphi_1) = U dq, \quad (2.68)$$

где U — напряжение на пластинах, изменяющееся в ходе зарядки конденсатора. Воспользовавшись тем, что ёмкость конденсатора определяется его размерами и средой, т. е. остается постоянной, можно заменить напряжение через ёмкость по

(2.65) и, интегрируя, найти работу, которая была совершена от начала до конца процесса зарядки:

$$A = \int_0^Q \frac{q}{C} dq; \quad \Rightarrow \quad A = \frac{Q^2}{2C}, \quad (2.69)$$

где Q — окончательный заряд на пластинах, который может быть заменен окончательной разностью потенциалов. Воспользовавшись вновь определением ёмкости конденсатора, получим

$$A = \frac{CU^2}{2}. \quad (2.70)$$

Мы вычислили работу, затраченную на зарядку конденсатора. Но она может быть не энергией поля, а энергией зарядов, сосредоточенных на пластинах. Поэтому введем в полученное выражение характеристики поля и убедимся, что эта энергия равномерно распределена по всему объёму поля. Действительно, используя формулу ёмкости плоского конденсатора (2.67) и связь напряжённости и разности потенциалов (2.62), будем иметь

$$W = A = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S E^2 d^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V, \quad (2.71)$$

где $V = Sd$ — объём между пластинами конденсатора, то есть объём поля. Также может быть найдена *плотность энергии* — энергия единицы объёма:

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (2.72)$$

В последнее уравнение вложен следующий физический смысл: *носителем энергии является электрическое поле*. Оно в каждой точке обладает энергией, определяемой *квадратом напряжённости поля*.

Если вспомнить один из основных выводов специальной теории относительности, изложенной в первой части этого курса, можно утверждать, что электрическое поле обладает и массой, т. е. ему свойственна инертность.

2.12. Электростатическое поле в диэлектриках

Диэлектриками считают вещества, лишённые свободных электрических зарядов. При внесении во внешнее электрическое поле в них не происходит собственного проводникам разделения зарядов. Внося диэлектрик в поле, и разделив его пополам, нельзя добиться отделения положительных зарядов от отрицательных, потому что диэлектрики построены либо из нейтральных молекул (все газообразные и жидкие диэлектрики и часть твердых тел), либо из ионов, закрепленных в узлах кристаллических решеток. Узлы кристаллической решётки расположены так, что в ближайшем соседстве с положительным ионом находится отрицательный ион, и в целом ячейка остается нейтральной. Речь идет об ионных кристаллических решетках типа $NaCl$.

В последнем случае диэлектрик можно представить как совокупность двух связанных между собой равных по величине и противоположных по знаку заря-

дов, разнесённых в пространстве на малое расстояние \vec{l} . (рис. 2.19). Это расстояние называют *плечом диполя*, а совокупность двух зарядов — *диполем*.

Плечо диполя направлено к положительному заряду. Во внешнем поле на диполь действует вращающий момент, под действием которого диполь поворачивается по направлению поля. Величина вращающего момента, помимо поля, определяется еще *дипольным моментом* — произведением заряда на плечо диполя:

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (2.73)$$

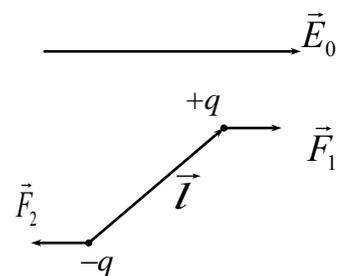


Рис. 2.19

В случае же, когда вещество состоит из нейтральных молекул (либо атомов), образование диполя происходит под действием поля: положительные заряды смещаются в одну сторону, отрицательные — в другую. В силу нейтральности молекул эти заряды равны по величине, и, сместившись друг относительно друга, образуют диполь, называемый часто *упругим*, в отличие от первого — *жесткого*. Случай, когда жесткий диполь помещен в однородное электрическое поле, иллюстрирован [рис. 2.17](#) и пояснен выше. В однородном поле силы, действующие на заряды диполя одинаковы, поэтому диполь только поворачивается по полю. Если же поле неоднородно, к примеру, оно больше возле положительного заряда, диполь сместится в его сторону, т. е. будет втянут в поле. Если диэлектрик, попавший в неоднородное поле, достаточно легкий, он последует движению диполей, из которых состоит, и притянется к телу, создающему поле.

Любой диэлектрик можно представить как совокупность дипольных моментов, ориентированных хаотически в отсутствии поля и получающих преимущественную ориентацию при внесении в поле. В первом случае сумма всех \vec{p}_i будет равна нулю, а во втором она примет определенное значение — диэлектрик *поляризуется*. На рис. 2.20а изображен тонкий слой вещества, не внесённого в поле (черный кружок обозначает "плюс", белый — "минус"). В случае, представленном на рис. 2.20б, молекулы уже имеют ориентацию по внешнему полю \vec{E}_0 , которая не происходит полностью из-за теплового движения. Сумма ди-

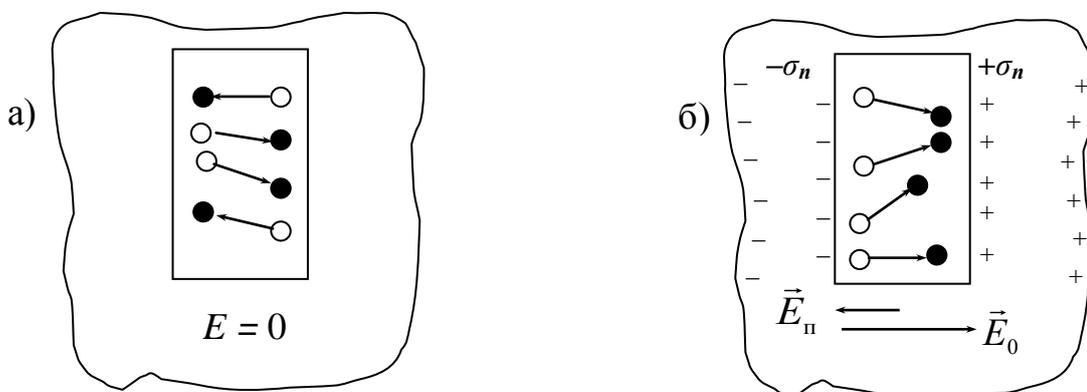


Рис. 2.20

польных моментов в этом случае не будет равна нулю, и она пропорциональна количеству диполей в выделенном объёме и степени их ориентации. Если поделить эту сумму дипольных моментов на объём диэлектрика, то получим величину, характеризующую степень поляризации диэлектрика. Назовем её *вектором поляризации*

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V}. \quad (2.74)$$

Нетрудно показать, что размерность вектора поляризации совпадает с размерностью поверхностной плотности зарядов: $[P] = [\sigma] = \text{Кл/м}^2$.

Следствием ориентации будут два явления, которые рассмотрим ниже.

1. Появление на поверхности диэлектрика заряженных слоев при равенстве нулю суммарного заряда внутри него. Появившиеся на поверхности заряды называют *поляризационными*. Поляризационные заряды характеризуются определенной поверхностной плотностью зарядов $\sigma_{\text{п}}$, которая растёт при увеличении напряжённости поля:

$$\sigma_{\text{п}} = \alpha \epsilon_0 E, \quad (2.75)$$

где α — коэффициент пропорциональности, называемый *диэлектрической восприимчивостью* вещества. Она характеризует способность молекул вещества ориентироваться по полю. Это свойство индивидуально для каждого вещества, определяется из опыта. Температура, естественно, уменьшает α , поскольку мешает ориентации диполей. Постоянная ϵ_0 вводится только в системе СИ из соображений размерности, как коэффициент пропорциональности между σ и E . Обратим внимание, что \vec{E} — напряжённость суммарного поля, получившегося в результате сложения внешнего поля \vec{E}_0 с полем поляризационных зарядов $\vec{E}_{\text{п}}$.

Не следует думать, что поляризационные заряды появляются лишь в тонком слое, выделенном на [рисунке 2.20](#) внутри диэлектрика. Ориентация присуща всем молекулам вещества, попавшего в поле. Поэтому рядом с отрицательным слоем, изображенным на рисунке, появятся молекулы следующего слоя, положительные заряды которого окажутся рядом с отрицательными. Слои компенсируют друг друга, и внутри *диэлектрика суммарный заряд будет равен нулю*. Останутся некомпенсированными лишь два поверхностных слоя, это и есть поляризационные заряды. Появление их на поверхности вещества, помещённого в поле, носит название *поляризации диэлектрика*.

2. Поляризация диэлектриков сопровождается появлением внутреннего, созданного поляризованными зарядами, поля. Оно направлено против внешнего и, складываясь с ним, даёт суммарную напряжённость

$$E = E_0 - E_{\text{п}} \quad (2.76)$$

Напряжённость $E_{\text{п}}$ можно связать с $\sigma_{\text{п}}$ известным соотношением этих величин для плоского конденсатора (2.30):

$$E_{\text{п}} = \frac{\sigma_{\text{п}}}{\epsilon_0}. \quad (2.77)$$

Тогда

$$E = E_0 - \frac{\sigma_{\text{п}}}{\epsilon_0}. \quad (2.78)$$

Выражая по (2.75) поверхностную плотность зарядов через напряжённость суммарного поля E и меняя местами E и E_0 , получим

$$E_0 = E + \alpha E = E(1 + \alpha), \quad (2.79)$$

или

$$E_0 = \epsilon E, \quad (2.80)$$

если ввести обозначение

$$(1 + \alpha) = \epsilon. \quad (2.81)$$

Введенная выше величина носит название *диэлектрической проницаемости*. Как и диэлектрическая восприимчивость, она является характеристикой вещества. Значение ϵ больше единицы, значит, поле в диэлектрике меньше, чем поле в пустоте, в ϵ раз. Впервые мы встретились с этой величиной, записывая закон Кулона. Теперь внесём уточнение: сила взаимодействия двух зарядов в диэлектрике уменьшается потому, что там уменьшается поле. Диэлектрическая проницаемость, так же как и восприимчивость, величина безразмерная.

Равенство (2.80) служит основанием для введения *вектора электростатической индукции*

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}. \quad (2.82)$$

Эта векторную величину удобно использовать вместо напряжённости в случае нескольких диэлектриков, потому что \vec{D} не изменяется при переходе из одной среды в другую:

$$\vec{D} = \epsilon_1 \epsilon_0 E_1 = \epsilon_2 \epsilon_0 E_2 = \dots \quad (2.83)$$

Вектор электростатической индукции (в некоторых учебниках его называют вектором электрического смещения) служит так же, как и вектор напряжённости, для изображения полей. Линии напряжённости на границе двух сред должны прерываться из-за изменения напряжённости. С силовыми линиями, определяемыми электростатической индукцией, это не произойдет, т. к. \vec{D} не зависит от среды.

2.13. Электрический ток, его характеристики и условия возникновения

При наличии электрического поля, силовые линии которого направлены вдоль проводника, каждый свободный заряд испытывает на себе действие силы, определяемой направлением напряжённости, и начинает движение под действием этой силы. *Направленное движение зарядов называется электрическим током*. В металлическом проводнике ток образуют свободные электроны, движущиеся против поля. В электролите в направленном движении участвуют ионы обоих знаков. Но за *направление тока* принято считать направление движения *положительных* зарядов, как было условлено еще [Ампером](#).

На [рис. 2.21](#) изображён участок проводника, где для каждого заряда указаны две скорости: скорость направленного движения $v_{\text{н}}$, одинаковая для всех зарядов, и скорость хаотического теплового движения. Результирующая скорость

каждого заряда не показана. Но ясно, что она задает всем зарядам преимущественный дрейф в направлении поля со скоростью v_H , так как векторная сумма тепловых скоростей зарядов практически равна нулю из-за их случайной направленности.

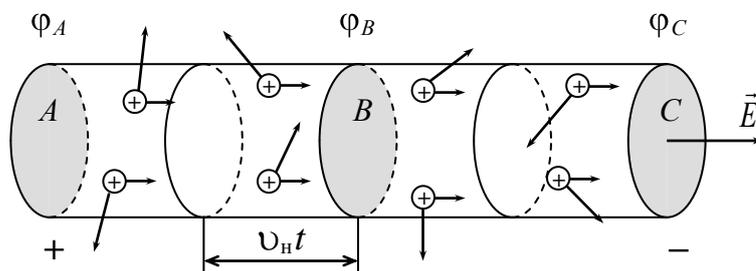


Рис. 2.21

Перпендикулярно силовым линиям проходят эквипотенциальные поверхности с убывающими в направлении напряжённости потенциалами. Сравнивая два потенциала, принято больший обозначать плюсом, а меньший минусом. Знак, очевидно, зависит от того, с какой плоскостью проводника проводится сравнение: потенциал плоскости B более положителен, чем C , и более отрицателен по отношению к A . Ток же всегда течет от плюса к минусу.

Силой тока называется заряд, перенесенный в единицу времени через поперечное сечение проводника:

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (2.84)$$

Судя по определению, сила тока не может быть векторной величиной.

Плотностью тока будем называть силу тока через единицу площади поперечного сечения:

$$\vec{j} = \frac{di}{dS_n} \cdot \frac{\vec{v}_H}{v_H}, \quad (2.85)$$

где di — сила тока сквозь площадку dS_n , перпендикулярную скорости направленного движения зарядов. Плотность тока является векторной величиной, совпадающей по направлению со скоростью направленного движения положительных зарядов.

Молекулярная картина рассматриваемого явления требует учесть хаотичное движение зарядов. Величина и направление скорости этого движения произвольны. Среднее её значение определяется основным уравнением молекулярно-кинетической теории:

$$\frac{m_0 v_T^2}{2} = \frac{3}{2} kT, \quad (2.86)$$

где v_T — средняя квадратичная скорость теплового движения, m_0 — масса движущегося заряда, а k — постоянная Больцмана. Уравнение служит первым приближением для оценки скорости хаотического движения и в настоящее время заменено уравнениями, даваемыми квантовой теорией. Из-за малой массы электрона скорость его теплового движения составляет при комнатных температу-

рах порядка 100 км/с. На [рис. 2.21](#) показаны векторы этой скорости, которая для каждого заряда имеет свое значение, тогда как скорость направленного движения, заданная полем, одинакова для всех зарядов. Величина этой скорости, так же, как и концентрация определяют собой силу тока и его плотность.

Действительно: пусть величина каждого заряда e , тогда весь заряд, перенесённый через поперечное сечение за t секунд, будет равен Ne , где N — число зарядов, прошедших сечение за это время. Если скорость направленного движения v_n , то за это время сечение B , например, пересекут лишь те заряды, которые находятся на расстоянии $v_n t$ от него (см. рис. 2.21). Нетрудно показать, что если концентрации зарядов n , то их пройдет $N = n v_n t S$, и перенесённый ими суммарный заряд

$$q = e n v_n t S. \quad (2.87)$$

Используя определение силы тока (2.84), получим

$$i = e n v_n S. \quad (2.88)$$

Скорость направленного движения определяется не только полем \vec{E} . Под действием одного и того же поля разные заряды получают разные ускорения в зависимости от своей массы и величины заряда. Более того, участвуя в направленном движении, заряды испытывают удары, сталкиваясь друг с другом и с ионами кристаллической решетки, а число этих столкновений тоже различно в разных средах. Это говорит о том, что *подвижность* зарядов в разных проводниках разная. Поэтому зависимость скорости направленного движения от напряжённости можно записать так:

$$\vec{v}_n = b \vec{E}, \quad (2.89)$$

где b — *подвижность зарядов*. Последняя является характеристикой проводника и зависит от его структуры и параметров свободных зарядов.

Уравнение (2.89) позволяет оценить скорость направленного движения по известной плотности тока и концентрации зарядов. Предоставляем читателю самому получить расчётную формулу и убедиться в том, что v_n действительно мала: порядка миллиметра в секунду при используемых обычно плотностях тока около 5 А/мм^2 . Величину концентрации зарядов можно взять из (2.63).

В тех случаях, когда ток образуется движением разноименных зарядов, как это имеет место в электролитах, газах и в полупроводниках, то силу тока следует представлять как сумму двух токов, создаваемых встречным движением положительных и отрицательных зарядов:

$$i = i_+ + i_-. \quad (2.90)$$

Аналогичное равенство имеет место и для плотности тока. Естественно, подвижность зарядов каждого знака в одном и том же проводнике будет, как правило, разной.

2.14. Основные законы электрической цепи

1. Закон Ома. Помимо хорошо известного закона Ома для участка цепи в физике часто используют этот же закон, но записанный в иной форме, которая носит название *дифференциальной*. Чтобы перейти к этой форме, выразим сна-

чала силу тока i в проводнике через его длину l и поперечное сечение S (рис. 2.22), используя закон Ома для участка цепи:

$$i = \frac{U}{R} = \frac{US}{\rho l}. \quad (2.91)$$

Здесь U — разность потенциалов или напряжение на концах проводника; $R = \rho l/S$ — сопротивление проводника; ρ — удельное сопротивление материала, из которого изготовлен проводник. Теперь, полагая поле в проводнике однородным (тогда $U = El$) и вводя обратную удельному сопротивлению величину — удельную проводимость $\sigma = 1/\rho$, нетрудно получить выражения для силы и плотности тока в проводнике, как функций напряжённости поля внутри проводника:

$$i = \sigma ES; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (2.92)$$

Последнее выражение и есть закон Ома в дифференциальной форме. Такое название ничуть не меняет суть закона: он остается опытным законом, только записанным не для всего проводника, а для малой области, взятой в любой точке внутри проводника. В физике он удобен тем, что связывает вектор плотности тока с напряженностью: они направлены одинаково, и плотность тока в любой точке проводника прямо пропорциональна напряженности электрического поля в этой точке.

Как и все опытные законы, закон Ома имеет ограниченное применение. Так, при увеличении напряженности поля до значений, когда скорость направленного движения делается сравнимой со скоростью теплового движения, число свободных зарядов в результате столкновений может увеличиваться. Это явление "размножения зарядов" особенно заметно в газах. Примером его может служить электрическая искра, где возникает так называемая лавина — резкое увеличение числа носителей.

Не подчиняются закону Ома и области контакта между двумя полупроводниками, между металлом и полупроводником. Элементы электрической цепи, в которых нарушается закон Ома, называют нелинейными (закон Ома диктует прямую линейную зависимость между током и напряжением). В электронике, радиотехнике и в современной электротехнике нелинейные элементы и цепи играют весьма существенную роль.

При больших плотностях тока, примерно в миллион раз превышающих обычно используемые, также наблюдается нарушение закона Ома.

2. Закон Джоуля — Ленца. Кроме своего очень широкого диапазона применения закон интересен еще и выводом, который из него следует. Сопоставим найденную по нему теплоту Q , выделившуюся на сопротивлении R при протекании по нему тока i , с работой по перенесению заряда q :

$$Q = i^2 Rt; \quad A = qU = itU. \quad (2.93)$$

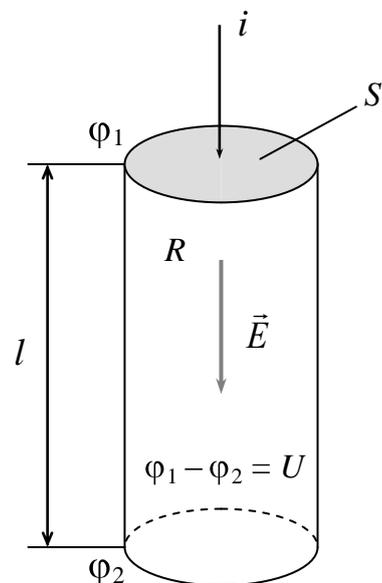


Рис. 2.22

Заменив в последнем равенстве напряжение через силу тока и сопротивление, получим выражение, эквивалентное первому. Получается, что работа по перемещению заряда в поле целиком идет на выделившееся тепло. Как и закон Ома, закон Джоуля — Ленца является экспериментальным. Его также можно представить в дифференциальной форме, проделав аналогичные процедуры. Предлагаем читателю самостоятельно вывести формулу закона Джоуля — Ленца в дифференциальной форме и показать, что удельная мощность тока прямо пропорциональна квадрату напряжённости электрического поля в проводнике.

3. Законы полной цепи. Такая цепь изображена на рис. 2.23.

Рассмотрим участок цепи с потенциалами конечных точек φ_1 и φ_2 . Тот участок, где заряды перемещаются под действием электростатических сил, называется *внешним*. При перемещении положительного заряда от точки A к точке B происходит убыль потенциала в A и возрастание его в B , т.е. разность потенциалов будет уменьшаться. В соответствии с законом Ома будет убывать и ток, причем очень быстро. Для поддержания тока постоянным необходимо совершать обратный перенос заряда с B на A по *внутреннему участку* замкнутой электрической цепи. Этот перенос не может происходить под действием электростатических сил. Против поля заряды могут перемещаться только под действием сил неэлектрического происхождения. Их называют *сторонними* силами. Они могут иметь механическую, электромагнитную, химическую природу и др.

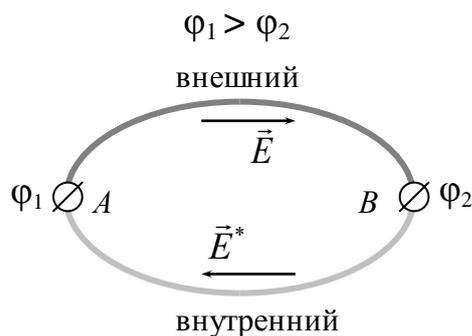


Рис 2.23

Участок цепи, где заряды перемещаются под действием сторонних сил, называется *внутренним*, а точки, разделяющие внешний и внутренний участки цепи — *зажимами*.

Работа, которую совершают сторонние силы по перемещению единицы заряда, называют *электродвижущей силой*:

$$\mathcal{E} = \frac{A^*}{q}. \quad (2.94)$$

По закону сохранения энергии работа сторонних сил расходуется на выделение теплоты как на внешнем, так и на внутреннем участке цепи:

$$A^* = \mathcal{E}q = i^2 R t + i^2 r t, \quad (2.95)$$

где R и r — сопротивление внешнего и внутреннего участков. Сократив на заряд, можно получить привычный для нас закон Ома для полной цепи, где сила тока равна электродвижущей силе, деленной на сумму сопротивлений.

Равенство (2.95) можно записать несколько иначе, если вместо теплоты подставить работу по переносу заряда, выражая её через силы, действующие на него. В любом замкнутом контуре всегда действуют две силы. Одна из них электрическая, равная произведению напряженности поля на находящийся в нём за-

ряд. Работа этой силы была нами найдена в (2.49), где перемещение взято по силовой линии, то есть совпадает с направлением силы. Если ввести E^* — напряженность поля сторонних сил, то аналогично можно найти и работу сторонних сил, всегда действующих в контуре с током:

$$A^* = \oint qE^* dr. \quad (2.96)$$

Работа, совершаемая источником тока, будет равна сумме интегралов:

$$\mathcal{E}q = \oint qE dr + \oint qE^* dr. \quad (2.97)$$

Первый интеграл равен нулю по (2.43) в силу потенциальности электростатического поля, значит:

$$\mathcal{E} = \oint E^* dr. \quad (2.98)$$

Последнее равенство, так же, как и (2.49), можно записать иначе, если использовать вместо перемещения по силовой линии произвольное перемещение $d\vec{l}$:

$$\oint \vec{E}^* d\vec{l} = \mathcal{E}. \quad (2.99)$$

Следовательно, работа сторонних сил по замкнутому контуру *не равна нулю*.

2.15. Удельное сопротивление

Сопротивление, используемое в законе Ома, не является характеристикой вещества, из которого сделан проводник, поскольку зависит от его размеров. Закон Ома в дифференциальной форме (2.92) несколько меняет ситуацию, используя удельную проводимость. Разобравшись в процессах, которые происходят в веществе, когда к нему приложено электрическое поле, можно выяснить, от чего она зависит. Первый шаг к этому был нами уже сделан перед тем, как мы получили уравнение (2.88), рассматривая молекулярную картину направленного движения зарядов и выражая плотность тока через концентрацию и скорость его носителей. Уравнением (2.89) было введено понятие подвижности электрических зарядов как коэффициента пропорциональности между скоростью направленного движения и напряженностью поля \vec{E} . Чтобы связать удельную проводимость с характеристиками вещества, достаточно теперь только сопоставить упомянутые равенства с законом Ома в дифференциальной форме (2.92). Получим

$$\vec{j} = nqb\vec{E}, \text{ то есть } \sigma = nqb. \quad (2.100)$$

Удельная проводимость вещества определяется концентрацией свободных зарядов в нём и их подвижностью. Есть смысл подробнее, чем это сделано выше, остановиться на этом понятии.

Заряды при своем движении испытывают столкновения, в момент которых теряют направленную скорость, она становится равной нулю. Если среднее время между двумя ударами обозначить через t , воспользоваться известным уравнением кинематики для определения скорости и вторым законом Ньютона для определения ускорения, получим

$$v = at; \quad qE = ma; \quad \Rightarrow \quad v = \frac{Eq}{m} t. \quad (2.101)$$

Очевидно, что подвижность будет зависеть от массы свободного заряда, его величины и среднего времени между двумя ударами:

$$b = \frac{v}{E} = \frac{qt}{m}, \quad (2.102)$$

т.е. определяется индивидуальными характеристиками как самого свободного заряда, так и вещества, в котором он движется. Понятно, что скорость направленного движения непостоянна во времени, хотя и в среднем одинакова для всех зарядов в данных условиях.

Любопытно, что среднее время между двумя ударами определить очень просто. Действительно, сопоставив полученное для b выражение с (2.100) увидим, что для расчета этого времени достаточно посмотреть в справочнике удельную проводимость любого вещества, например, меди. Концентрацию свободных зарядов в ней мы уже оценивали в (2.64), а заряд и массу электрона можно также взять из таблиц. Оказывается, что это время больше, чем можно было ожидать: около $3 \cdot 10^{-14}$ с. Почему больше? Потому что скорость хаотичного движения, оцененная по (2.86), для электрона составит 10^5 м/с, то есть получается, что между двумя ударами об ионы кристаллической решетки электрон проходит около 3 нм, т.е. более десяти расстояний между центрами атомов кристаллической решетки! Если учесть, что ионы в решетке практически прикасаются друг к другу (в кристаллической решетке ионы плотно упакованы!), то полученная выше цифра становится трудно объяснимой в рамках классического описания процесса, приведённого выше. Объяснение было получено только тогда, когда были открыты волновые свойства электронов — в квантовой механике. Закончим на этом обсуждение уравнения (2.100), взяв его за основу описания различных веществ в их свойствах проводить электрический ток.

2.16. Деление веществ на три класса

Известно, что значения удельного сопротивления различных веществ изменяются в очень широком диапазоне: от 10^{-8} Ом·м для меди до 10^{16} Ом·м для стекла при комнатной температуре. Ни одно свойство вещества не меняется в таких широких пределах! Наглядное представление о диапазоне изменения удельного сопротивления различных веществ поможет составить рис 2.24, на котором представлены зависимости удельного сопротивления от температуры. Следует обратить внимание, что на этой диаграмме уменьшение удельного сопротивления идет снизу вверх, т.е. по вертикальной оси фактически отложена проводимость.

В верхней части диаграммы находятся металлы, в нижней части — диэлектрики (стекло и каменная соль). Между ними расположены полупроводники германий и кремний. Графит — уникальное по своей природе вещество, казалось бы, по величине сопротивления должен быть отнесен к металлам. Но в настоящее время за основу деления веществ на три (и даже более) класса принято

не значение удельного сопротивления, а характер его температурной зависимости.

На рис. 2.24 хорошо заметно, что эта зависимость для металлов носит совсем иной характер, нежели для остальных веществ: у металлов сопротивление линейно растет с повышением температуры. Эта зависимость хорошо известна из школьного курса физики и выражается соотношением

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (2.103)$$

где ρ — удельное сопротивление данного металла при температуре t °С; ρ_0 — удельное сопротивление при $t = 0$ °С, α — температурный коэффициент сопротивления, индивидуальный для каждого вещества, но близкий к $1/273$.

На диаграмме хорошо заметно, что линейная зависимость для свинца нарушается при низких температурах. Сопротивление становится равным нулю сразу, как только достигается определённая температура, которая носит название *критической*. Такое резкое падение сопротивления характерно не только для свинца, но и для ряда других металлов и сплавов. Сопротивление таких веществ при достижении критической температуры скачком уменьшается до нуля.

В Массачусетском технологическом институте (США) в семидесятые годы был проведен такой опыт: свинцовое кольцо опустили в жидкий гелий (температура его кипения при атмосферном давлении 4,2 К) и возбудили в нём ток 10А. Кольцо находилось в жидком гелии в течении года, и ток в нём всё это время циркулировал, не уменьшаясь. Свинец совсем не сопротивлялся прохождению по нему электрического тока! Установлено также, что наряду с исчезновением электрического сопротивления меняются и другие физические свойства. Поэтому принято считать, что вещество, охлажденное до критической температуры, находится в особом состоянии, называемом *сверхпроводящим*. Температура перехода в сверхпроводящее состояние для каждого вещества своя: так, для свинца она около 4 К, для некоторых сплавов достигает 20 К. В 1976 году было открыто явление *высокотемпературной сверхпроводимости* и в настоящее время получены вещества (как ни странно, это *керамика*, которая при комнатных температурах обладает большим сопротивлением) с температурой перехода около 100 К. Это уже довольно высокая температура, которую сравнительно легко поддерживать, опуская вещество в жидкий азот. Но широкое и поистине фантастическое применение получит сверхпроводимость в том случае, если удастся создать вещество с температурой перехода, близкой к комнатной. Естественно, такое вещество должно иметь такие механические свойства, чтобы из него можно было изготовить элементы электрических цепей, например, линию электропередачи, в которой потери на джоулево тепло будут практически равны

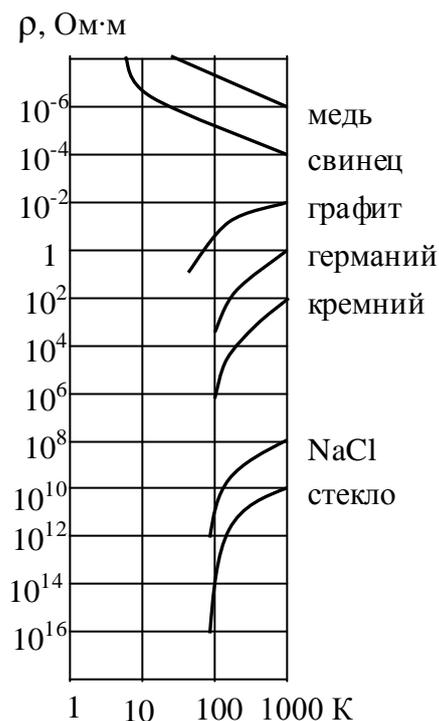


Рис. 2.24

нулю. Теория сверхпроводимости позволила предсказать строение органических молекул и состав редкоземельных сплавов, которые должны обладать свойством сверхпроводимости при комнатных температурах, однако они ещё не получены.

Уменьшение сопротивления металлов при охлаждении их в первом приближении можно объяснить принятой выше молекулярно-кинетической картиной прохождения тока. Действительно, в полученном выше выражении для удельной проводимости (2.100), с повышением температуры подвижность зарядов должна уменьшаться из-за уменьшения времени между двумя столкновениями. Концентрация же свободных зарядов будет сохраняться постоянной: в металлах свободные электроны образуются в момент конденсации их паров.

Иначе обстоит дело у полупроводников и диэлектриков. На диаграмме (см. рис. 2.24) заметно, что стекло при температурах, близких к комнатной, практически имеет нулевую проводимость, которая очень резко возрастает при возрастании температуры приблизительно до 1000 К. Чуть менее ярко это выражено у каменной соли. Явление появления электрического тока в диэлектриках носит название *пробоя*, который объясняется разрушением молекул вещества при сильном нагревании, появлением при этом свободных зарядов, способных перемещаться под действием поля.

В полупроводниках проводимость близка к нулю при температурах, меньших 100 К, и возрастает по мере роста температуры, хотя и гораздо более плавно, чем у стекла. Одинаковый характер температурной зависимости имеет и одинаковое объяснение: *нагревание приводит к росту концентрации свободных зарядов*. В полупроводниках ими являются электроны, которые при низких температурах (<100 К) принадлежат каждому своему атому. Тепловое движение при повышении температуры приводит к их отрыву. Энергия, необходимая для этого, носит название *энергии активации*. При достижении комнатной температуры свободных электронов делается достаточно много, и полупроводник пропускает электрический ток.

Концентрация свободных зарядов может быть найдена с помощью Больцмановского распределения:

$$n = n_0 e^{-\frac{\Delta E}{kT}}, \quad (2.104)$$

где n — концентрация молекул, получивших энергию ΔE . Если эта энергия равна энергии активации, то n будет концентрацией свободных электронов. Помимо них в полупроводнике появляются *дырки* — места, покинутые электронами. В окружении отрицательных электронов эти пустые места эквивалентны положительному заряду. В случае, если электрон соседнего атома займет пустующее место, дырка перемещается. Естественно, перемещение дырок при наложении поля будет происходить в направлении поля. В полупроводниках существует всегда два типа свободных зарядов — отрицательные электроны и положительные дырки, концентрации которых равны: при отрыве одного электрона образуется одна дырка. Речь здесь идет о *собственной проводимости* чистых полупроводников. Примеси нарушают равновесие между дырками и электронами.

В отличие от диэлектриков, в полупроводниках свободные заряды есть уже при комнатных температурах, поскольку их энергия активации лежит в пределах 10^{-2} – 10^0 эВ, что в десятки и сотни раз меньше, чем у диэлектриков. Процесс образования свободных зарядов в этих веществах существенно сильнее влияет на проводимость, чем усиление хаотичности движения при возрастании температуры, поэтому проводимость с ростом температуры у полупроводников и диэлектриков увеличивается. Температурную зависимость проводимости нетрудно получить, совместив (2.100) с (2.107):

$$\sigma = qbn_0 e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \quad \text{или} \quad \sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{kT}}, \quad (2.105)$$

где $\sigma_0 = qbn_0$ — предельная проводимость.

Полученное экспоненциальное возрастание проводимости при росте температуры совпадает с опытными кривыми, приведёнными на рис. 2.24.

2.17. Квантование электрического заряда

Заканчивая тему, посвящённую электрическим полям, вернёмся к вопросу о природе источника этих полей — электрического заряда. В разделе 1.2 (см. Введение) была упомянута проблема квантуемости электрического заряда, которая была решена экспериментом в начале XX века. В середине его, в шестидесятые годы, в связи с одной из гипотез в области элементарных частиц, вопрос о величине и существовании минимальной порции электричества вновь привлёк к себе внимание физиков всего мира. Попыты по её определению повторялись многократно в глубоких шахтах, высоко в атмосфере, на дне моря. Остановимся поэтому более подробно на сути этих опытов, осуществлённых впервые в 1911 году Р. Миллиkenом в Англии и А.Ф. Иоффе в России.

Заряд любой мелкой частицы легко определить, поместив ее в поле плоского конденсатора и уравновесив электрическим полем действующую на неё силу тяжести (рис. 2.25а). Если частица при этом находится в некоторой среде, то на неё будет действовать также сила Архимеда F_A . При равновесии векторная сумма сил равна нулю, следовательно

$$qE + F_A = mg, \quad (2.106)$$

где q и m — заряд и масса частицы. Естественно, уравнение разрешимо лишь в случае, когда известны масса частицы и её объем.

«Взвесить» частицу можно в том же конденсаторе, отключив поле. Но на падающую частицу будут действовать уже иные силы (рис. 2.25б), которые вновь будут уравновешены при равномерном её падении:

$$F_{\text{тр}} + F_A = mg, \quad (2.106)$$

где сила вязкого трения (сила Стокса) определяется вязкостью среды, радиусом шарика r и его скоростью v . Выразив массу и силу Архимеда через радиус частицы, получим

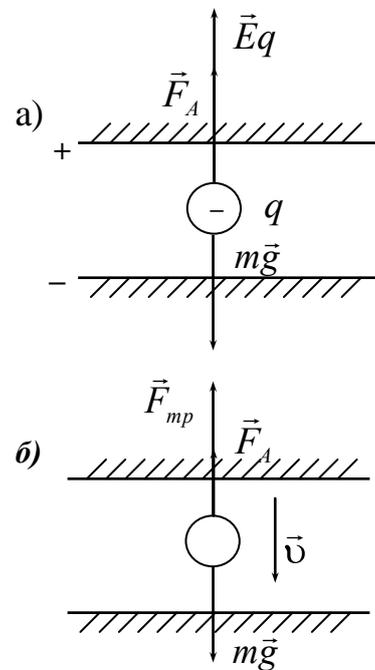


Рис. 2.25

$$\rho_{cp} g \frac{4}{3} \pi r^3 + 6\pi \eta \omega r = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 g. \quad (2.108)$$

При известной скорости падения из этого уравнения можно найти радиус падающего тела и, следовательно, его массу.

В опытах Милликена и Иоффе в плоский конденсатор вбрызгивалась масса мелких капель масла (или вдувались мелкие металлические опилки). Некоторые из них зависали. Зафиксировав положение одной из них, нетрудно было, отключив поле, определить скорость её падения, когда она делалась постоянной. Повторив измерения многократно, исследователи получили целый ряд значений заряда зависшей капельки. К примеру, он мог оказаться таким:

$$(9,6; 3,2; 6,4; 8,0; 4,8) \cdot 10^{-19} \text{ Кл}. \quad (2.109)$$

Легко видеть, что каждое из этих чисел без остатка делится на минимальное число, равное $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, давая при этом ряд целых чисел. Отсюда можно заключить, что заряд каждого шарика составлял целое число зарядов электрона, который и принят в настоящее время за «атом» электричества.

В 1963 году была высказана гипотеза, согласно которой в природе должны существовать частицы с зарядом, составляющим часть заряда электрона. Они были названы *кварками*. Их три сорта, и каждый имеет заряд, равный либо третьей части заряда электрона, либо двум третьим от него. Знак заряда у каждого сорта кварка свой. Так как в опытах не удалось найти частицы с дробным зарядом, есть основания предполагать, что на нынешнем этапе развития Вселенной они и не должны встречаться в свободном состоянии. Составлять же другие элементарные частицы кварки могут. Например, входящие в состав ядра атома протон и нейтрон можно составить каждый из трех кварков. Более подробно эта тема будет рассмотрена в третьей части.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется потоком, циркуляцией, градиентом? В каких единицах измеряются эти величины в случае электрического поля? гравитационного поля?
2. Дайте определение характеристик электрического поля. Как они называются? Как зависят от координат, если поле создаётся точечным зарядом? плоскостью? цилиндром? шаром? сферой? системой зарядов?
3. Сформулируйте и докажите теорему Гаусса. Для чего, в каких случаях и как она используется?
4. Как вычисляется работа электростатического поля? Покажите, что электростатическое поле потенциально. Какова связь между напряжённостью и потенциалом?
5. Что называется напряжением? Как оно вычисляется и в каких единицах измеряется?
6. В чём отличие взаимодействия проводников и диэлектриков с электрическим полем? Электрический диполь, его поведение в электрическом поле.
7. Что такое электроёмкость? От чего она зависит, как вычисляется, в чём измеряется?
8. Как вычисляются энергия и объёмная плотность энергии электрического поля?
9. Электрический ток, его сила и плотность, единицы измерения. Носители тока в металлах, электролитах, газах.
10. Основные законы электрической цепи в интегральной и дифференциальной формах.
11. Работа в электрической цепи. Электродвижущая сила.
12. Классификация веществ по их электрическим свойствам. Сверхпроводимость.
13. Дискретность электрического заряда. Определение заряда электрона.

3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

3.1. Взаимодействие движущихся зарядов

В первом разделе 2 части этого курса лекций подробно обсуждалась ювелирная сбалансированность положительных и отрицательных зарядов, существующая в природе. Она приводит к тому, что два рядом расположенных проводника не взаимодействуют друг с другом. Нетрудно убедиться, что если пропустить по ним постоянный электрический ток, то проводники либо оттолкнутся, либо притянутся друг к другу. Первое имеет место в случае, если токи текут в противоположных направлениях, второе — в одном направлении. Совершенно очевидно, что в описанном явлении проявляется новый тип взаимодействия, отличный от известного нам электростатического: ведь проводники электрически нейтральны, а взаимодействие проявляется только при движении зарядов и зависит от направления их движения относительно друг друга. Этот новый тип взаимодействия был открыт Ампером. Оно объясняется возникновением поля, которое *создается движущимися электрическими зарядами и носит название магнитного*. Поиски магнитного заряда, который бы по аналогии с электрическим можно было бы принять за источник магнитного поля, не дали положительных результатов. Предположение Ампера о том, что магнитное поле возникает при движении электрического заряда остаётся поэтому в силе по сей день.

Опытами ученых середины XIX века было установлено, что движение электрических зарядов сопровождается целым рядом явлений, а созданные этим движением магнитные поля, обладают определенными, только им присущими характерными свойствами. Начало изучению электромагнетизма положил Эрстед в 1820 году, когда, закончив читать лекцию, он расположил магнитную стрелку вблизи проводника и обнаружил, что она поворачивается при включении тока. После опубликования этого интересного результата последовал целый ряд открытий. Каждый из полученных законов носит теперь имя открывателя. Сейчас мы воздержимся от перечисления имен тех ученых, трудами которых была создана столь важная для развития человечества наука. С этими именами мы встретимся в процессе изучения самих законов. Помимо этого, в конце четвертого раздела дан именной указатель, в котором приведены основные сведения об ученых, положивших начало не только современной физике, но и технике. Подчеркнём, что каждый новый закон свидетельствовал о неразрывной связи электрических и магнитных явлений. Именно поэтому возникший в то время раздел физики именовали электромагнетизмом. Ампер же назвал его *электродинамикой*. Название очень удачно подчеркивает тот факт, что движущиеся заряды создают поля, принципиально отличающиеся от полей покоящихся зарядов, с иными свойствами.

Это отличие особенно впечатляет при сравнении величины сил взаимодействия двух зарядов в указанных выше случаях. Сила магнитного взаимодействия существенно слабее кулоновской силы. Точнее, отношение этих сил равно

отношению квадратов скоростей движения взаимодействующих зарядов и света. Если учесть, что при обычно используемых плотностях тока скорости направленного движения очень малы — порядка нескольких миллиметров в секунду (см. раздел 2.13), то сила магнитного взаимодействия будет в этих условиях в 10^{23} раз (проверьте!) меньше кулоновской силы. Но описанное выше притяжение и отталкивание двух проводников с токами мы легко наблюдаем на опыте, поскольку положительные и отрицательные заряды в веществе сбалансированы очень точно. Относительная малость сил магнитного взаимодействия не мешает их практическому использованию, примером которого могут служить электродвигатели.

Зависимость магнитных сил от расстояния между зарядами аналогична подобной зависимости для электростатических сил, даваемой законом Кулона:

$$\vec{F}_M = -\frac{v^2 q_2}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \vec{r}}{r^3}. \quad (3.1)$$

Знак минус в равенстве отражает тот опытный факт, что магнитная сила направлена противоположно кулоновской силе. Если сила Кулона (1.1) положительна, то взаимодействующие заряды имеют одинаковый знак, т.е. отталкиваются. Магнитное же взаимодействие двух зарядов одного знака, движущихся параллельно друг другу, приведет к их притяжению. Последнее и наблюдается в опыте, описанном в начале раздела. Судя по записанному выше равенству, направление силы совпадает с вектором \vec{r} , проведённым от одного заряда к другому, как это имеет место в законе Кулона. Но если вместо квадрата скорости в равенство ввести её вектор (а точнее — два вектора, характеризующие движение каждого из зарядов), направление силы будет иным. Об этом речь пойдет ниже. Сейчас же для нас важно отметить, что это равенство, вытекающее из опытных законов Ампера, имеет и логическое обоснование с позиций специальной теории относительности Эйнштейна.

Сведений из теории относительности, приведённых в 1 части нашего курса лекций [6], вполне достаточно, чтобы дать это обоснование. Те же читатели, которые по каким-либо причинам не будут интересоваться этим обоснованием, могут пропустить следующий параграф. Это не повлияет на последовательность изложения и понимание основных законов электромагнетизма, выведенных из равенства (3.1), обоснованием которого мы теперь займемся. В этом случае формулу (3.1) следует принять за опытный факт, следуя историческому развитию физики.

3.2. Магнитное взаимодействие как релятивистский эффект

Покажем, что магнитное взаимодействие двух движущихся зарядов возникает лишь в том случае, если это движение наблюдать из системы отсчета, *не связанной с зарядами*. Если же наблюдатель движется *вместе* с зарядами прямолинейно и равномерно со той же скоростью \vec{v} , то все явления протекают так, как если бы система покоилась, то есть сила взаимодействия с его точки зрения будет только кулоновской. Этого требует *принцип относительности*, сформу-

лированный еще Галилеем для механических явлений и обобщенный Эйнштейном на все явления, включая и электромагнитные.

Чтобы не только доказать появление магнитной силы при переходе из одной системы отсчета в другую, но и получить соответствующее опыту выражение для нее, нам потребуется только два хорошо известных вывода теории относительности:

1. Время минимально в той системе, где происходит событие.
2. Масса минимальна в той системе, где тело покоится.

Приведём соответствующие этим выводам формулы:

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.18) \quad \text{и} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.46). \quad (3.2)$$

Номера, стоящие возле каждого выражения, принадлежат уравнениям, введённым в 5-й главе 1 части курса лекций.

А теперь рассмотрим мысленный опыт, изображенный на рис. 3.1. Речь пойдет о тех же двух зарядах одного знака, которые движутся с одинаковой скоростью параллельно друг другу и их движение можно принять за два параллельно текущих тока. Мы помним, что эти токи должны притягиваться, взаимодействуя своими магнитными полями. На рис. 3.1 показаны силовые линии заряда q_1 , который создает поле. Сила, действующая на заряд q_2 , попавший в это поле, будет кулоновой для того наблюдателя, который находится в системе K' и движется вместе с зарядами со скоростью v в направлении оси X . Эта сила взаимодействия может быть записана так:

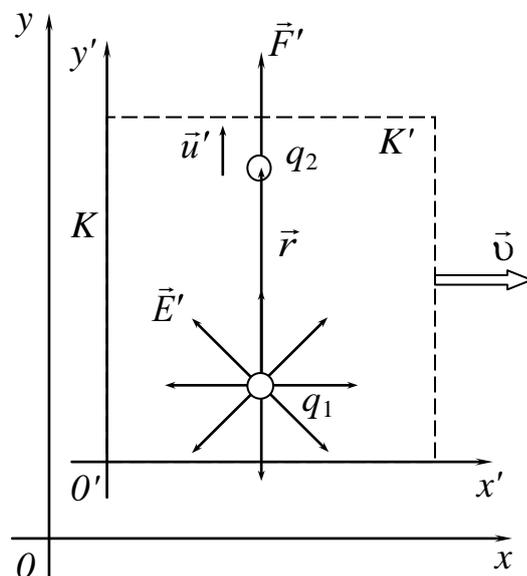


Рис. 3.1

$$\vec{F}' = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^3} \vec{r} \quad \text{и} \quad \vec{F}' = q_2 \vec{E}', \quad (3.3)$$

где \vec{E}' — напряжённость поля точечного заряда q_1 , а \vec{r} — вектор, проведённый от заряда, создающего поле, в ту его точку, где находится заряд q_2 , т.е. перпендикулярно скорости движения зарядов (см. рис 3.1).

Чтобы найти силу \vec{F} , которая действует на заряд q_2 с точки зрения наблюдателя, находящегося в лабораторной системе отсчета K , запишем второй закон Ньютона для этой системы, считая что масса заряда q_2 будет m в системе K и m_0 в системе K' , где он покоится:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt}, \quad (3.4)$$

где u — скорость в направлении оси OY , которую может получить заряд q_2 под действием силы \vec{F} . Приращение координаты y при движении заряда вдоль этой

оси будет одинаковым в обеих системах, т.е. $dy = dy'$. Тогда связь скоростей поперечного движения заряда может быть найдена просто заменой времени dt на dt' по первому из соотношений (3.2):

$$u = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = u' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.5)$$

Сила \vec{F} теперь может быть связана с кулоновой силой \vec{F}' заменой в (3.4) массы заряда m на m_0 — массу заряда в той системе, где он покоится; времени dt на dt' и скорости u на u' по только что полученному соотношению, то есть

$$\vec{F} = \vec{F}' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (3.6)$$

что мы получали ранее, решая задачу 2 [6, р. 5.9].

Преобразуем последнее равенство, умножив и поделив правую часть на $\sqrt{1 - v^2/c^2}$:

$$\vec{F} = \frac{\vec{F}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\vec{F}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.7)$$

Для скоростей, далеких от скорости света $v \ll c$, знаменатели ≈ 1 , и на заряд q_2 в системе K будут действовать две противоположно направленные силы:

$$\vec{F} = \vec{F}' - \frac{v^2}{c^2} \vec{F}'. \quad (3.8)$$

Напомним, что через \vec{F}' мы обозначили обычную силу Кулона, действующую на заряд q_2 в системе отсчета, связанной с движущимися зарядами. С точки зрения экспериментатора, наблюдающего это движение из системы K , к взаимному отталкиванию добавится существенно меньшая по величине сила притяжения, равная силе Кулона, умноженной на отношение квадратов скоростей, т.е. магнитная сила (3.1). Величина этой силы зависит от скорости движения, и она меньше кулоновой в v^2/c^2 раз, а её направление противоположно силе \vec{F}' , что соответствует результатам опыта по взаимодействию параллельных токов.

3.3. Вектор магнитной индукции

Теперь будет вполне уместным подробно обсудить выражение для магнитной силы, которое помимо модуля этой силы должно задавать еще и ее направление. Для этого выполним поставленную ранее задачу и введем в уравнение (3.1) вектор скорости, который присутствует в равенстве в скрытом виде. Для этого запишем двойное векторное произведение для векторов \vec{v} и \vec{r} , раскрывающееся по правилу "бац минус цаб":

$$\vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{r}) = \vec{v} (\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r} (\vec{v} \cdot \vec{r}) = -\vec{r} v^2. \quad (3.9)$$

Первый член обращается в нуль, поскольку угол между векторами \vec{r} и \vec{v} составляет 90° , и остается только второй член, поскольку $\cos 0 = 1$.

Произведя соответствующую замену в (3.1) и отнеся квадрат скорости света к постоянным, получим:

$$\vec{F}_M = q_2 \vec{v} \times \left[\vec{v} \times \vec{r} \right] \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 c^2 r^3}. \quad (3.10)$$

Мы вновь соблюдаем прежний принцип, использованный для записи силы, действующей со стороны электростатического поля: заряд q_2 , попавший в поле, выделен. Логично, видимо, будет считать, что один из двух векторов скоростей, входящих в векторное произведение, характеризует движение этого заряда. Остальные величины (по аналогии с электростатическим полем) можно отнести к полю, теперь уже магнитному. Тогда получим

$$\vec{F}_M = q \left[\vec{v} \times \vec{B} \right], \quad (3.11)$$

если через \vec{B} обозначить векторное произведение векторов \vec{v} и \vec{r} , умноженное на стоящую за этим произведением дробь.

Вектор \vec{B} носит название *магнитной индукции* и является *силовой характеристикой магнитного поля*. Индекс у заряда в (3.11) опущен. Ясно, однако, что это заряд, движущийся в магнитном поле \vec{B} .

Сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле, получила название *силы Лоренца*. Её величина и направление могут быть найдены по выражению (3.11). Закономерностями движения заряда под действием силы Лоренца мы займемся позднее. Сейчас же обсудим новое, введенное выше, понятие магнитной индукции. Оно может быть использовано для описания любого магнитного поля, а не только этого частного случая поля, созданного одним движущимся зарядом. Характерные же черты, отличающие магнитные поля от электрических, проявляются и на этом частном примере.

Используя введённое выше обозначение магнитной индукции, опустив при этом индекс заряда и объединив все постоянные величины, получим

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{q \left[\vec{v} \times \vec{r} \right]}{r^3}. \quad (3.12)$$

Выражение отличается от известного нам значения напряжённости электростатического поля точечного заряда (2.12) только тем, что в него вошел вектор скорости. Это вполне естественно, так как магнитное поле возникает лишь при движении заряда и должно зависеть от его скорости. В коэффициент пропорциональности здесь, в отличие от аналогичного для электростатического поля, входит квадрат скорости света. В настоящее время этот коэффициент принято записывать несколько иначе, вводя *магнитную постоянную* $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$. Значение μ_0 приведено в справочных таблицах, и оно так же, как и ϵ_0 , является признаком Международной системы единиц СИ. Эту постоянную иногда называют также магнитной проницаемостью вакуума. С μ_0 выражение для магнитной индукции поля движущегося заряда примет стандартный вид:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \left[\vec{v} \times \vec{r} \right]}{r^3}. \quad (3.13)$$

Последнее равенство задаёт не только величину, но и направление вектора магнитной индукции \vec{B} . Он перпендикулярен векторам \vec{v} и \vec{r} , т.е. расположен в плоскости, перпендикулярной той, в которой они лежат, как того требует правило векторного умножения.

На рис. 3.2 изображены векторы \vec{B} для трех точек, взятых по разные стороны от движущегося перпендикулярно плоскости чертежа положительного заряда. Направление каждого вектора определено правилом векторного умножения, и оно своё в каждой точке. Все точки взяты на одинаковом расстоянии от заряда, значит лежат на окружности радиуса r .

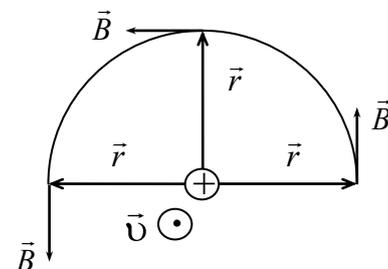


Рис. 3.2

Нетрудно заметить, что вектор магнитной индукции будет касательным к этой окружности в каждой ее точке. Кривая, к которой вектор индукции будет касательным в каждой точке, называется *силовой линией*. Силовые линии магнитного поля оказываются замкнутыми кривыми. Опыт показывает, что это действительно так.

Силовые линии магнитного поля легко наблюдать, если это поле создано проводником с током. По ним располагаются железные опилки, введенные в поле. Какова бы ни была форма проводника, характерным отличием силовых линий магнитного поля остается их замкнутость. Они не имеют ни начала, ни конца и охватывают движущиеся заряды, их создающие. На рис. 3.3 приведены силовые линии прямого тока, соленооида и тороида. Во всех трех случаях, так же, как и в случае поля одного движущегося заряда, сохраняется замкнутость

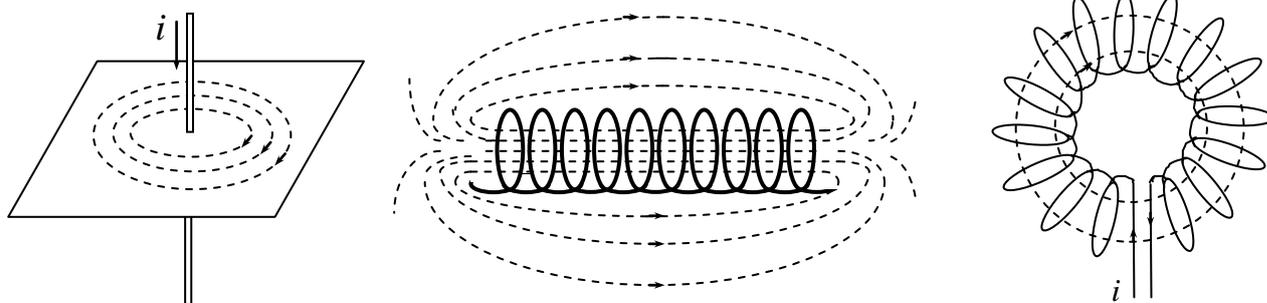


Рис. 3.3

силовых линий, в отличие от картины силовых линий электростатического поля. Это свойство магнитных полей можно получить из более общих теоретических соображений, мы же отметим его пока как опытный факт.

Важно помнить, что направление силовых линий даёт возможность судить о направлении вектора магнитной индукции в любой точке поля. Для этого следует лишь провести в требуемой точке поля касательную. Направление же силовой линии, как для случая движения одного заряда, так и для любого тока, определяется правилом буравчика, которое может заменить правило векторного умножения. Легко убедиться, например, что если поступательное движение бу-

равчика совместить с движением положительного заряда, либо с направлением тока, то вращение совпадает с направлением силовой линии.

Рассматривая три случая (см. рис. 3.3), вы убедитесь, что поступательное движение не всегда совпадает с током (текущим в направлении движения положительного заряда). Во втором и третьем случаях следует совместить с током *вращение* буравчика, тогда поступательное движение даст направление поля. И в соленоиде, и в торе силовые линии остаются замкнутыми кривыми. Внутри соленоида поле будет практически *однородным*: силовые линии параллельны друг другу. В торе векторы магнитной индукции меняют свое направление. Предлагаем читателю рассмотреть еще один случай: найти направление поля в случае, если ток течет по проводнику, свернутому в один виток. По существу, решение этой задачи должно предшествовать обсуждению поля соленоида.

Картина силовых линий, как видим, определяется формой проводника, по которому течет ток. Направление вектора магнитной индукции всегда остается касательным к силовой линии. Величина же этой основной характеристики магнитного поля рассчитывается для каждого конкретного случая по своему соотношению. У нас пока имеется только одно выражение (3.13) для вычисления магнитной индукции поля, созданного одним движущимся точечным зарядом. Прежде, чем перейти к обсуждению других, практически более существенных случаев, отметим, что магнитная индукция не может быть измерена непосредственно, как, например, потенциал электростатического поля. Точнее, как разность потенциалов — напряжение. Поскольку магнитная индукция определяет силу, действующую на движущийся заряд (либо ток), ее можно измерить по величине этой силы или момента сил, действующих на рамку с током, помещенную в магнитное поле. Именно поэтому в большинстве курсов физики понятие магнитной индукции вводится на примере поворота рамки с током в магнитном поле. В настоящее время основным методом определения магнитной индукции является способ, основанный на совсем ином явлении — на *электромагнитной индукции*.

3.4. Закон Био — Савара

Для того чтобы обобщить выражение, полученное для расчета магнитной индукции поля, созданного *одним* движущимся зарядом, на случай, когда этих зарядов N , запишем выражение (3.13) в скалярной форме:

$$B_1 = \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} \sin(\vec{v}, \vec{r}). \quad (3.14)$$

Уточним теперь смысл всех величин, входящих в выражение (3.14). Для этого рассмотрим рис. 3.4, где изображен заряд q , движущийся в проводнике со скоростью v . Показана силовая линия поля, созданного зарядом, проходящая через точку A , где требуется найти магнитную индукцию. Вектор магнитной индукции изображен в точке, отстоящей на расстоянии r от заряда. Угол между векторами \vec{v} и \vec{r} в этом случае тупой. Обратите внимание, что речь идет об угле между *началами* векторов \vec{v} и \vec{r} , а начало вектора \vec{r} *совпадает с зарядом*, а не с

той точкой (в данном случае т. A), в которой определяется магнитная индукция! В уравнении и на чертеже индукции поля, создаваемого одним зарядом, присвоен индекс 1, чтобы иметь возможность отличать её от магнитной индукции, созданной всеми зарядами проводника.

Очевидно, если в элементе dl содержится N зарядов, то созданное ими поле dB будет в N раз больше чем B_1 :

$$dB = NB_1 = ndlsB_1, \quad (3.15)$$

где n — концентрация зарядов, а Sdl — объём рассматриваемого участка проводника. Подставляя значение B_1 (3.14), получим

$$dB = ndls \frac{\mu_0 qv}{4\pi r^2} \sin(\vec{v}, \vec{r}). \quad (3.16)$$

В этом, довольно громоздком, выражении содержатся величины, произведением которых определяется сила тока. Об этом шла речь в разд. 2.13. Используя полученное там равенство (2.88), будем иметь

$$dB = \frac{\mu_0 idl}{4\pi r^2} \sin(\vec{dl}, \vec{r}), \text{ и векторно: } d\vec{B} = \frac{\mu_0 i[dl \times \vec{r}]}{4\pi r^3}. \quad (3.17)$$

Поскольку скорость движения заряда теперь отсутствует, вектор ее заменен вектором \vec{dl} , совпадающим с ней по направлению.

Полученное выражение и есть закон Био — Савара. [Био](#) и [Савар](#) опытным путем установили, что магнитная индукция определяется величиной тока и длиной элемента проводника \vec{dl} . Математик Лаплас, обобщая данные их опытов, нашел обратную пропорциональность поля квадрату расстояния. Поэтому часто название закона приводят с тремя фамилиями — закон Био — Савара — Лапласа. Интересно отметить, что в опытах Био и Савар за индикатор поля принимали намагниченные стальные пластинки, подвешенные на нитях. Поле меняло период их колебаний. Этот метод и теперь используется в геодезии, для определения магнитной индукции поля Земли.

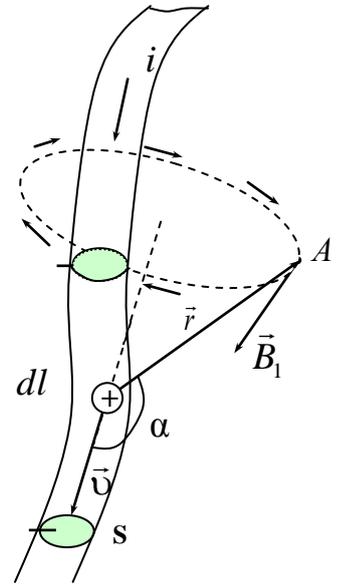
Исторически сложилось так, что для характеристики магнитного поля часто используют вместо вектора \vec{B} напряженность магнитного поля \vec{H} . Она связана с магнитной индукцией выражением

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad (3.18)$$

где μ — магнитная проницаемость — безразмерная величина, характеризующая магнитные свойства среды. Обычно напряженность используют для характеристики поля в воздухе (вакууме), где $\mu = 1$.

3.5. Вычисление напряженности магнитного поля прямого тока

Закон Био — Савара дает возможность вычислить напряженность магнитного поля, либо магнитную индукцию, созданную током, текущим по проводнику



любой формы. Для этого нужно лишь просуммировать действие всех отдельных элементов тока $d\vec{l}$, на которые можно разбить любой проводник. Поскольку и напряженность и магнитная индукция — величины векторные, перед тем как суммировать $d\vec{H}$, следует убедиться, что эти вектора, созданные каждым элементом $d\vec{l}$, направлены одинаково. Только после этого можно воспользоваться скалярным выражением закона Био — Савара и проинтегрировать его в тех пределах, для которых векторы $d\vec{H}$ направлены одинаково.

Рассмотрим случай бесконечно длинного прямого провода, изображенного на рис. 3.5. Весь провод вначале разбивают на элементы $d\vec{l}$, два из которых выделены на рисунке. Направление элементов совпадает с направлением тока. Найти напряженность, созданную одним из элементов в точке A , где она нас интересует, можно, пользуясь законом Био — Савара. Для этого из начала вектора $d\vec{l}$ следует провести радиус-вектор в точку A , и указать угол α , синус которого входит в закон. Направление поля, созданного этим элементом в точке A , находится правилом буравчика. Затем следует передвигать элемент вдоль провода, проверяя каждый раз направление соответствующего $d\vec{H}$. Угол α между началами векторов $d\vec{l}$ и \vec{r} при этом будет меняться: для элемента, взятого в начале провода, он стремится к нулю. Потом, постепенно возрастая, делается тупым и в пределе стремится к π . Случай, когда угол тупой, тоже изображен на рис. 3.5.

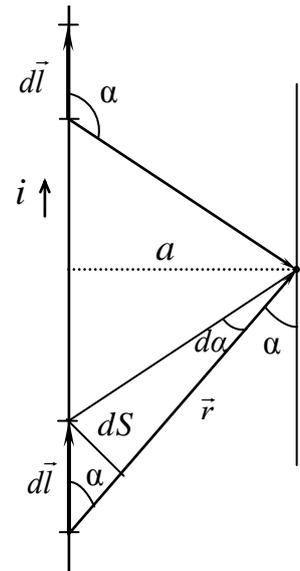


Рис. 3.5

Легко видеть, что в точке A , где требуется найти напряженность, векторы $d\vec{H}$, созданные всеми элементами $d\vec{l}$, направлены одинаково, поэтому

$$H = \int dH = \int \frac{1}{4\pi} \frac{idl}{r^2} \sin \alpha. \quad (3.19)$$

Пределы интегрирования пока расставить затруднительно, поскольку под знаком интеграла три переменных. Сведение их к одной можно произвести разными способами. Мы рассмотрим один из них.

Прежде всего стоящее под знаком интеграла произведение двух переменных dl и $\sin \alpha$ дает dS — элемент окружности радиуса $\approx r$ с центром в точке A , где ищется напряженность. Проведя через эту точку прямую, параллельную $d\vec{l}$, мы убедимся, что этот элемент опирается на угол, который можно обозначить через $d\alpha$. Значит:

$$dl \sin \alpha = dS = r d\alpha \quad \text{и} \quad H = \int \frac{1}{4\pi} \frac{id\alpha}{r}. \quad (3.20)$$

Опустив теперь перпендикуляр на проводник с током и обозначив его длину $r \sin \alpha$ буквой a , получим интеграл с одной переменной — углом α :

$$H = \frac{i}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \alpha d\alpha}{a}, \quad \text{и окончательно} \quad H = \frac{i}{2\pi a}. \quad (3.21)$$

Пределы интегрирования взяты для случая, когда проводник бесконечный. Если же он ограничен с обеих сторон, результат интегрирования будет

$$H = \frac{i}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (3.22)$$

Выражение для напряженности прямого бесконечного провода (3.21) может послужить для установления единицы измерения напряженности. В СИ она носит название, совпадающее с ее размерностью: *ампер на метр* (А/м). О единицах измерения магнитной индукции мы будем говорить позднее.

Разобранный выше пример расчета магнитного поля с помощью закона Био — Савара типичен, на его основе решаются многие задачи, в том числе и часто встречающиеся на практике. Существует еще одна возможность нахождения напряженности магнитного поля — *теорема о полном токе*. Она имеет ограниченное применение, закон же Био — Савара может быть использован в любом случае, правда, часто с серьезными математическими затруднениями.

3.6. Движение зарядов под действием силы Лоренца

Введя понятие магнитной индукции в разделе 3.3, мы получили возможность магнитную силу — силу, действующую со стороны магнитного поля на движущийся заряд, записать в виде равенства (3.11). Теперь подробнее остановимся на вопросе, как будет двигаться частица под действием этой силы. Для этого запишем ее модуль, раскрыв векторное произведение:

$$F = qvB \sin \alpha, \quad (3.23)$$

где α — угол между векторами скорости и магнитной индукции, входящими в равенство. Очевидно, что сила не будет совпадать по направлению ни с одним из них, а будет перпендикулярна плоскости, в которой лежат эти вектора, и направление ее будет определяться правилом векторного умножения.

Естественно, простейшим случаем движения будет тот, когда угол $\alpha = 0$ (или π), т.е. заряд движется параллельно полю. Сила Лоренца при этом будет равна нулю, и заряд будет двигаться равномерно и прямолинейно.

Если угол $\alpha = 90^\circ$, т.е. заряд движется перпендикулярно силовым линиям, то нетрудно показать, что траекторией заряда будет дуга окружности (если поле однородное!).

Этот случай удобно изображать (рис. 3.6), направив вектор \vec{B} перпендикулярно плоскости чертежа, тогда вектор скорости, расположенный в плоскости чертежа и направленный как угодно, всегда будет перпендикулярен \vec{B} . Вектор же силы будет лежать в плоскости чертежа, как того требует правило векторного умножения. Последнее часто заменяют *правилом левой руки*: силовые

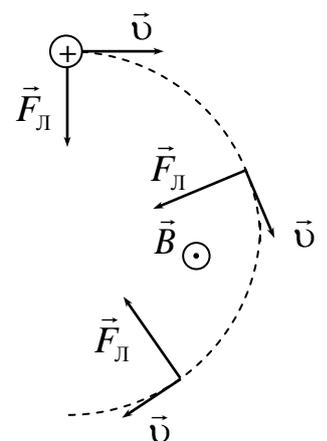


Рис. 3.6

линии входят в ладонь, вытянутые пальцы показывают направление движения заряда, отогнутый под прямым углом большой палец покажет направление силы. Правило сформулировано для случая движения положительного заряда. Удивительной особенностью магнитной (лоренцевой) силы является то, что она все время остается перпендикулярной скорости, хотя направление последней меняется. Результатом является движение заряда по окружности, поскольку, в соответствии со 2 законом Ньютона сила Лоренца сообщает заряду нормальное ускорение:

$$\vec{F}_л = m\vec{a}; \Rightarrow qvB = m\frac{v^2}{R}, \quad (3.24)$$

откуда легко найти радиус окружности R . Поле меняет лишь направление скорости, оставляя постоянной ее величину. При этом энергия заряда остается постоянной. Очевидно, что энергия заряда не зависит от его положения в поле, каждая точка поля в этом смысле эквивалентна соседней.

Переходя к общему случаю, когда заряд влетает в поле под углом α , проверим, сохраняется ли энергия заряда постоянной и для этого движения.

Теперь изображать вектор \vec{B} перпендикулярно плоскости рисунка нерационально, т.к. должен быть виден угол α . На рис. 3.7а он показан. Там же изображены проекции вектора скорости на направление поля и направление, ему перпендикулярное. Вектор силы Лоренца в этом случае будет расположен в горизонтальной плоскости (рис. 3.7б) и его величина будет определяться только нормальной составляющей скорости v_n :

$$F_л = qvB\sin\alpha = qv_nB. \quad (3.25)$$

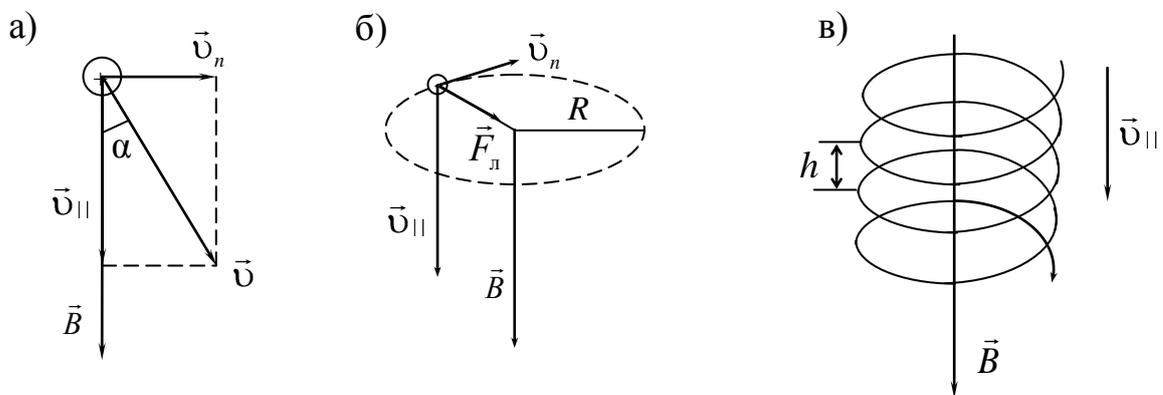


Рис. 3.7

Поскольку эта сила перпендикулярна v_n , она будет сообщать заряду нормальное ускорение

$$qv_nB = m\frac{v_n^2}{R}. \quad (3.26)$$

Следовательно, заряд будет двигаться по окружности, радиус которой пропорционален нормальной составляющей скорости. Одновременно он будет двигаться и вдоль силовых линий со скоростью $v_{||} = v\cos\alpha$ (см. рис. 3.7а), которая

сохраняется постоянной как по величине, так и по направлению, поскольку сила Лоренца всегда перпендикулярна полю, и значит $\vec{F}_L \perp \vec{v}_{||}$.

В результате движение заряда будет движением по спирали, ось которой совпадает с направлением поля (рис. 3.7в). Шаг этой винтовой линии, т.е. расстояние, пройденное вдоль оси за время одного оборота,

$$h = v_{||}T, \quad (3.27)$$

где T — период вращения заряда, который может быть найден по нормальной составляющей скорости, т.е. по (3.25):

$$T = \frac{2\pi R}{v_n} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (3.28)$$

и, оказывается, не зависит от скорости заряда.

Подводя итог, заметим, что занявшись разложением скорости на составляющие, мы составили представление о характере движения. Зная только величину силы, мы бы этого сделать не смогли. Особенность этого, довольно сложного движения, сохраняется прежней: заряд, двигаясь в магнитном поле, не получает тангенциального ускорения, т.е. не меняет величины своей скорости, а значит и свою энергию. К обсуждению этого факта мы еще вернёмся. Здесь уместно заметить, что в физике лоренцевой силой принято считать полную силу, действующую на заряд, движущийся одновременно и в электрическом, и в магнитном полях:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (3.29)$$

В нашей учебной литературе силой Лоренца принято называть второй член этого выражения, чему мы и следовали.

3.7. Сравнение свойств магнитных и электрических полей.

Теорема полного тока

Во втором разделе были подробно рассмотрены признаки потенциальности электростатического поля при сопоставлении его с полем тяготения. Разбирая особенности магнитного поля, уместно сравнить его с электростатическим.

1. Сопоставление свойств двух полей начнем, сравнивая их действия на движущийся заряд. На покоящийся заряд магнитное поле не действует, а электростатическое поле действует как на покоящийся, так и на движущийся заряд. Сила его действия по-прежнему задается напряженностью поля \vec{E} , введенной в самом начале этого курса уравнением (2.1). От скорости движения заряда она не зависит. Из определения следует, что сила, действующая на положительный заряд, совпадает по направлению с напряженностью. Естественно, если заряд отрицательный, сила направлена против поля.

Теперь предположим, что заряд движется. Направление его движения может быть произвольным по отношению к полю, поэтому поле по-разному будет действовать на влетевший в него заряд: если положительный заряд движется в направлении поля, то сила, действующая с его стороны, сообщит заряду тангенци-

альное ускорение, совпадающее по направлению со скоростью. Естественно, тангенциальное ускорение может быть и отрицательным, если сила поля направлена против скорости. Заряд либо ускоряется, либо замедляется полем. Скорость заряда, а значит и кинетическая энергия, меняются. Изменение последней, как того требует закон сохранения, может происходить лишь за счет изменения той потенциальной энергии, которую имеет заряд, помещенный в поле. Наличие потенциальной энергии заряда, находящегося в электрическом поле, позволяет ввести потенциал поля (см. разд. 2.7).

Поле \vec{E} может сообщить и нормальное ускорение заряду, в него влетевшему, в том случае, если скорость заряда перпендикулярна полю. Из II закона Ньютона следует, что ускорение в этом случае будет также нормально к скорости, т.е. поле не будет менять величину скорости заряда и его энергию.

Магнитное же поле действует одинаково, как бы ни была направлена скорость его движения по отношению к полю, создавая всегда нормальное ускорение. Поскольку кинетическая энергия заряда, движущегося в магнитном поле, сохраняется, говорить об изменении его потенциальной энергии бессмысленно. Следовательно, нельзя ввести и понятие потенциала, его в магнитном поле не существует. *Магнитное поле не совершает работы.* Оно относится не к потенциальным полям, а к вихревым.

2. Потенциальность электростатического поля определяется тем, что работа по замкнутому контуру в этом поле равна нулю, т.к. не зависит от пройденного пути, а определяется лишь его конечной и начальной точками. Это свойство поля подробно разобрано в разд. 2.6. Оно приводит в итоге к тому, что интеграл по замкнутому контуру от произведения $\vec{E}d\vec{l}$ равен нулю. Очевидно, умножив приведенное выше произведение на заряд, мы получим работу. Равенство нулю работы по замкнутому контуру часто принимается за основной признак потенциальности поля (см. выражения 2.42, 2.43).

Магнитное поле работы не совершает, поэтому произведение его напряженности \vec{H} на перемещение $d\vec{l}$ лишено физического смысла. Однако можно вычислить интеграл от этого произведения, взятый по какому-либо замкнутому контуру.

Сначала рассмотрим случай, когда замкнутый контур, вдоль которого будем вести интегрирование, охватывает бесконечный прямой провод с током (рис. 3.8.) Чтобы вычислить круговой интеграл от $\vec{H}d\vec{l}$, выберем направление обхода по контуру. Пусть оно совпадает с направлением силовой линии поля, созданного этим током, тогда вектор элемента контура $d\vec{l}$ и напряженность поля \vec{H} составят между собой острый угол. Раскрывая скалярное произведение векторов, получим возможность ввести проекцию $d\vec{l}$ на направление \vec{H} , т.е. элемент окружности радиуса r , который может быть заменен через произведение $r d\varphi$:

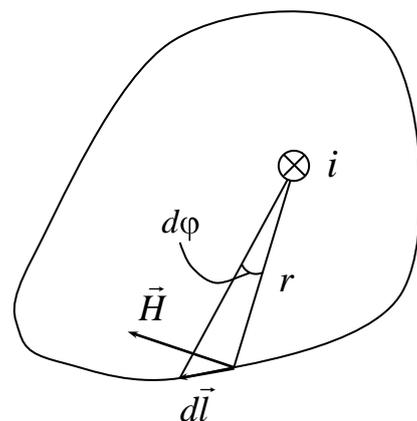


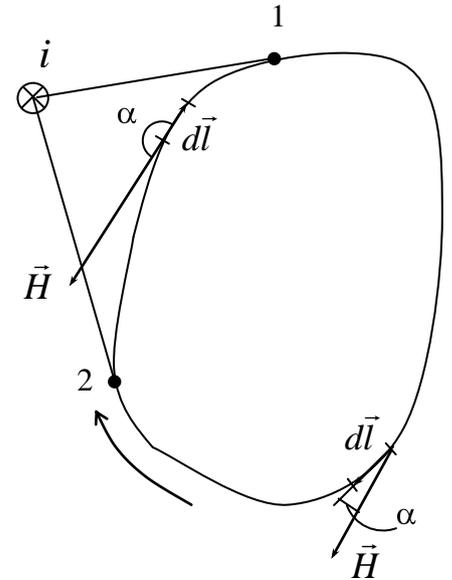
Рис. 3.8

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint H dl \cos \alpha = \int_0^{2\pi} H r d\varphi. \quad (3.30)$$

Заменяя H его значением для бесконечно длинного прямого провода (3.21) и интегрируя по $d\varphi$, будем иметь

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = i. \quad (3.31)$$

Полученное выражение получило название *теоремы полного тока*. Оно является свидетельством непотенциальности поля, поскольку интеграл не равен нулю. Ток i здесь — это полный ток, охватываемый контуром, вдоль которого ведется интегрирование. В случае, если контур не охватывает проводник с током (рис. 3.9), полный ток равен нулю, значит равен нулю и интеграл по этому контуру. Доказательство равенства интеграла нулю основано на том, что для участка контура, где направление $d\vec{l}$, определяемое направлением обхода, не совпадает с \vec{H} , угол α — тупой, и значения косинусов отрицательны. Путь интегрирования разбивается на два участка, на которых интегралы противоположны по знаку. Сумма их даёт нуль.



Признаком потенциальности поля является равенство нулю соответствующего интеграла, взятого по любому замкнутому контуру. Для магнитного поля этого не наблюдается. Сравнивая два поля, можно записать

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad \oint \vec{H} d\vec{l} = i. \quad (3.32)$$

3. Силовые линии электростатического поля всегда имеют начало на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных, они не замкнуты. Электростатическое поле имеет источник — заряд. Наличие источника и незамкнутость силовых линий есть отличительный признак потенциальных полей. Силовые линии магнитного поля, напротив замкнуты, они не имеют начала и конца.

3.8. Вычисление напряженности магнитного поля тора и соленоида

Теорема полного тока очень важна потому, что наиболее полно и вместе с тем лаконично выражает основное свойство магнитного поля — его непотенциальность. Помимо этого, в целом ряде случаев она имеет прикладное значение: с помощью теоремы легко вычисляется напряженность некоторых полей.

В качестве примера рассмотрим тороидальную катушку (рис. 3.10). Если по тороиду течет ток i , то для контура в виде окружности произвольного радиуса r , проходящей внутри витков, теорема полного тока дает

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint H dl = iN, \quad (3.33)$$

где N — число витков тороида, а iN — полный ток, пересекающий контур. Так как распределение токов относительно оси тороида симметрично, то напряжённость на одинаковых расстояниях от оси одна и та же. Поэтому H выносится за знак интеграла, а круговой интеграл от $d\vec{l}$ даёт длину окружности:

$$H \cdot 2\pi r = iN \quad \text{и} \quad H = \frac{iN}{2\pi r}. \quad (3.34)$$

Рассматривая окружности радиусов R_1 и R_2 , мы легко убедимся, что для них

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = 0. \quad (3.35)$$

В первом случае нуль получается потому, что контур R_1 не охватывает никакого тока. Во втором случае площадь, ограниченную контуром радиуса R_2 , пересекает суммарный ток iN , текущий в одном направлении и такой же ток, но текущий в противоположно направлении. Сумма их, очевидно, равна нулю.

Тороид отличается от прямого соленоида только тем, что ось его свёрнута в виде окружности. Поэтому выражение (3.34) будет пригодно и для вычисления напряжённости магнитного поля прямого соленоида, если $2\pi r$ заменить длиной контура l . Тогда

$$H = \frac{iN}{l} = in, \quad (3.36)$$

где n есть число витков на единицу длины или плотность намотки, а произведение iN называется числом ампер-витков.

Полученный результат справедлив лишь в случае достаточно длинного соленоида, т.е. тогда, когда можно пренебречь искажениями поля, возникающими вблизи концов. В противном случае придется прибегнуть к закону Био — Савара, интегрирование которого связано с трудностями замены переменных и интегрированием векторных величин. Поскольку трудности носят чисто математический характер, оставим эти вопросы на практические занятия.

3.9. Примеры использования силы Лоренца

Начало двадцатого века связано с открытиями, позволившими познать не только строение атома, но и ядра, найти частицы, его составляющие. И всё это несмотря на то, что атом до сих пор остается невидимым! Одной из характеристик атома, ядра и составляющих его частиц является масса. На экспериментальном ее определении основаны не только теории, но и весьма существенные для современной атомной промышленности расчеты. Приборы, с помощью которых определяют массу атомов, элементарных частиц, носят название *масс-спектрографов*. Первый масс-спектрограф был сконструирован в 1913 году в Англии учителем Резерфорда Дж. Томсоном, который открытием электрона (1897г.) положил начало изучению многочисленных элементарных частиц.

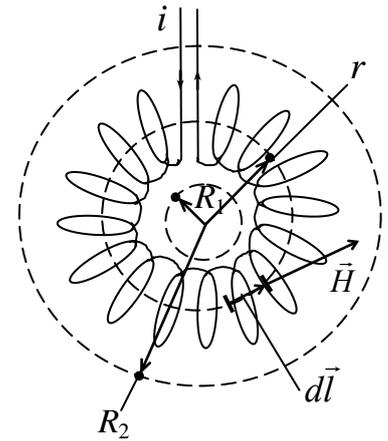


Рис. 3.10

В настоящее время типов масс-спектрографов много, но все они основаны на совместном действии электрических и магнитных полей. Электрические поля используются для ускорения элементарных частиц, либо атомов вещества, переведенного в газообразное состояние, которые для этого должны быть предварительно ионизированы. Это одновременно достигается, например, в том случае, если из исследуемого вещества изготовить два электрода и пропустить между ними электрический ток. Разность потенциалов, которую проходят заряженные частицы, задает им кинетическую энергию

$$\frac{m v^2}{2} = qU. \quad (3.37)$$

Для определения массы частицу направляют в магнитное поле, которое может иметь различное по отношению к скорости направление. Рассмотрим тот случай, когда пучок ускоренных частиц попадает в однородное магнитное поле, направленное к нему перпендикулярно. В этом случае движение их будет движением по окружности согласно уравнению (3.24). Совместное решение уравнений (3.24) и (3.37) даст возможность определить массу частицы по известному напряжению, магнитной индукции и радиусу кривизны траектории частицы в магнитном поле:

$$m = \frac{B^2 R^2 q}{2U}. \quad (3.38)$$

Радиус может быть рассчитан по геометрическим параметрам прибора и отклонению частицы при фиксировании ее либо на флюоресцирующем экране, либо на фотопластинке. Расчет отнесем на практические занятия. Схема действия прибора приведена на рис. 3.11а.

Другая схема масс-спектрографа, в котором частицы попадают в однородное магнитное поле, направленное по оси цилиндра, под углом к нему и движутся по спирали, приведена на рис. 3.11б. В этом случае замеряется время прохожде-

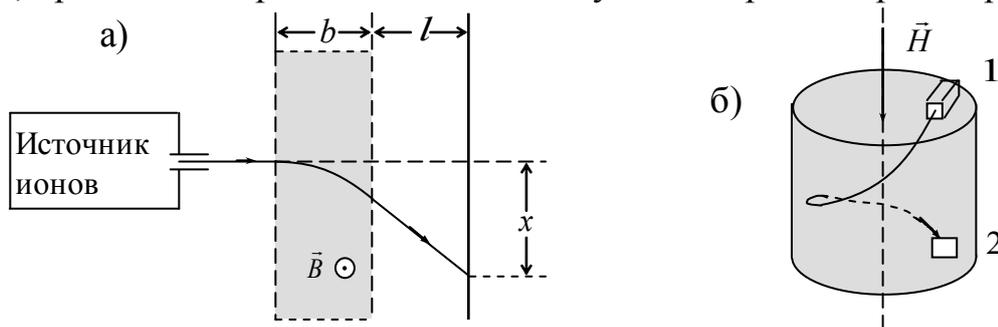


Рис. 3.11

ния их через цилиндр — оно составляет несколько наносекунд и может быть измерено с большой точностью. Принцип расчета массы полностью основан на рассмотренном выше случае движения частицы под действием силы Лоренца, когда поле составляет угол α с направлением скорости. Известно, что частица при этом будет двигаться по спирали. Если время, затрачиваемое на один виток обозначить через $T = 2\pi r/v$, а число витков через N , то измеряемое время про-

хождения частицы от источника 1 до приемника 2 может быть представлено их произведением. Принимая во внимание уравнение (3.27), получим

$$t = TN = \frac{2\pi m}{qB} N. \quad (3.39)$$

Естественно, что работа масс-спектрографа требует решения многих проблем: создание пучка ионизированных частиц, его фокусировка, регистрация, наконец, измерение малых промежутков времени. Достижения современной электроники позволяют выполнить все эти условия столь ювелирно, что массы частиц, до сих пор невидимых, определяются с точностью до 10^{-6} – 10^{-7} а.е.м., т.е. до шестого либо седьмого знака. Значения масс атомов сведены в таблицы, часть которых приведена в наших задачниках.

На действии электрических и магнитных полей основана работа *ускорителей* элементарных частиц. Частицы ускоряются всегда только электрическим полем. В *линейных* ускорителях создаётся большая разность потенциалов, пройдя которую, частицы получают большую энергию, двигаясь по прямой. Создание требуемой разности потенциалов связано с ограничениями из-за того, что при большом потенциале проводника заряды начинают с него стекать. В *циклических* ускорителях частица под действием магнитного поля движется по криволинейной траектории и многократно проходит электрическое поле с одной и той же разностью потенциалов, каждый раз увеличивая свою кинетическую энергию на величину qU .

Простейшим ускорителем является циклотрон, принципиальная схема которого приведена на рис. 3.12. Ускорение частиц происходит при их движении между двумя полыми коробками — дуантами. Между дуантами приложено электрическое напряжение, которое и ускоряет частицу. Перпендикулярно дуантам создаётся магнитное поле, которое изменяет направление движения частицы, сообщая ей нормальное ускорение. В результате частица описывает полуокружность и возвращается в промежуток между дуантами, где к моменту ее возвращения знаки на дуантах должны смениться, иначе движение частицы замедлится, а не ускорится. Время смены знаков на дуантах должно быть точно равно половине периода: $\Delta t = T/2$.

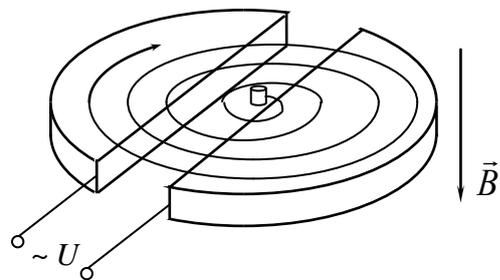


Рис. 3.12

На рисунке показана трубка, вводящая заряженные частицы в промежуток между дуантами вблизи центра циклотрона. Радиус траектории частиц возрастает по мере увеличения скорости, период же обращения сохраняется постоянным, т.к. он зависит от индукции магнитного поля, от массы и заряда частицы, и не зависит от её скорости. Действительно, найдя отношение R/v из (3.24) и подставив его в выражение $T = 2\pi R/v$, получим

$$T = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (3.40)$$

Строгое постоянство частоты подаваемого на дуанты напряжения и равенство ее частоте кругового движения зарядов является основой действия циклотрона.

По мере совершенствования техники удалось приблизить скорость частиц на выходе из циклотрона к скорости света. При этом наблюдалось нарушение в работе ускорителя: дойдя до определенной энергии, частицы дальше не ускорялись, а иногда и замедлялись. Это легко объясняется релятивистским увеличением массы частицы, которое следует из теории относительности. Период при этом возрастает, и в результате получается, что частица не успевает подойти к ускоряющему промежутку между дуантами к моменту смены знаков на них и тормозится электрическим полем. Можно сохранить период постоянным, если синхронно с массой увеличивать поле \vec{B} или при постоянном \vec{B} уменьшать частоту смены знаков на дуантах. Такие ускорители называют *синхротронами*.

Современные ускорители являются колоссальными и очень дорогостоящими инженерными сооружениями. Строительство таких научных "приборов" подчас не под силу одной стране. Так, в Женеве работает синхротрон, построенный совместными усилиями 14 европейских стран. Ускоряемые на нем протоны достигают скорости 0,9994 скорости света. Подобные ускорители есть в Брукхейвене и в Беркли (США), в Дубне и в Серпухове (Россия) и др. Они используются, в основном, для физических исследований в области элементарных частиц. Но имеют и прикладное значение: получение изотопов, ускорение химических процессов, изменение физических свойств вещества.

Интереснейшей областью использования особенностей движения частиц в магнитном поле является проблема непосредственного преобразования тепла в электричество, минуя совершение механической работы в турбинах, которые вращают генераторы электрического тока. Обычный процесс получения электроэнергии (котел — турбина — генератор) сопряжен с большими потерями, особенно при переходе тепловой энергии в механическую. Затратив же тепловую энергию на получение ионизированного газа, можно без механических посредников превратить тепло в электричество. Генераторы, осуществляющие этот переход, получили название магнитогидродинамических (МГД-генератор).

Принципиальная схема одного из них — линейного фарадеевского генератора — изображена на рис. 3.13. Стрелкой показано направление вдуваемой в него плазмы, движущейся со скоростью v . Обычно плазму получают как продукт сгорания топлива, либо используют пары металлов. Магнитное поле \vec{B} вызывает отклонение положительных ионов в направлении, указанном на схеме горизонтальной стрелкой. Отрицательные частицы плазмы — электроны — будут отклоняться в противоположную сторону. Оседая на электродах, расположенных на стенках камеры, электроны и ионы создают разность потенциалов, необходимую для поддержания тока в нагрузке R .

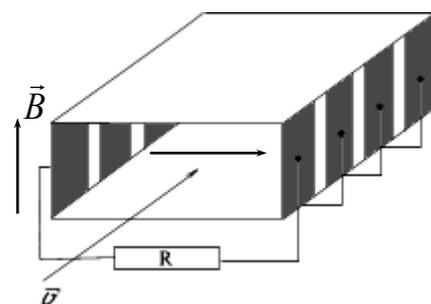


Рис. 3.13

Уже существуют различные типы МГД-генераторов с мощностями до десятков МВт и КПД до 20%. Чем выше температура плазмы, тем больше КПД

(вспомните цикл Карно!), поэтому применение МГД-генераторов наиболее перспективно на атомных электростанциях. В случае осуществления термоядерной реакции в промышленных масштабах эти генераторы будут единственно возможными первичными преобразователями получаемой в этой реакции тепловой энергии в электричество. Иные типы генераторов здесь принципиально невозможны из-за высокой температуры, при которой идёт реакция.

3.10. Амперова сила. Работа перемещения тока в магнитном поле

Протекающий по проводнику ток представляет совокупность зарядов, движущихся (дрейфующих) в одном направлении со средней скоростью v . Если это движение происходит в магнитном поле, то каждый из них испытывает действие одинаково направленной силы. Складываясь, все эти силы дают равнодействующую, проявляющуюся в макроскопическом действии магнитного поля на проводник с током. Модуль силы, действующей в магнитном поле на элемент тока dl , можно найти, умножив величину силы Лоренца (3.23) на число движущихся зарядов в элементе тока, которое пропорционально их концентрации n и объёму элемента Sdl , если через S обозначить поперечное сечение проводника:

$$dF_A = (qvB\sin\alpha)(nSdl). \quad (3.41)$$

(Вспомните вывод закона Био — Савара, когда при переходе от магнитной индукции, созданной одним движущимся зарядом, мы перешли к индукции, созданной элементом тока). Введя силу тока i (2.88), получаем величину *силы Ампера*, действующей на бесконечно малый элемент проводника с током:

$$dF_A = idlB\sin\alpha, \quad (3.42)$$

где α — угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{B} , поскольку направление элемента dl совпадает с направлением скорости движения положительного заряда. В векторной форме

$$d\vec{F}_A = i d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (3.43)$$

т.е. направление силы Ампера совпадает с направлением векторного произведения $d\vec{l}$ и \vec{B} . Заметим, что здесь, как и в случае лоренцевой силы, для определения направления можно пользоваться правилом левой руки, заменив им правило векторного умножения. Остается добавить, что силу Ампера \vec{F}_A , действующую на весь проводник, а не только на его бесконечно малый элемент, можно найти, складывая векторы $d\vec{F}_A$, то есть интегрируя выражение (3.43) по длине проводника.

Интересно сопоставление двух сил — Лоренца и Ампера — с точки зрения возможности произвести работу. Первая сила лишь меняет направление движения заряда, но ускорить его не может, то есть работу не производит. Рассмотрение простейшего опыта (рис. 3.14) свидетельствует, что действие амперовой силы может привести к перемеще-

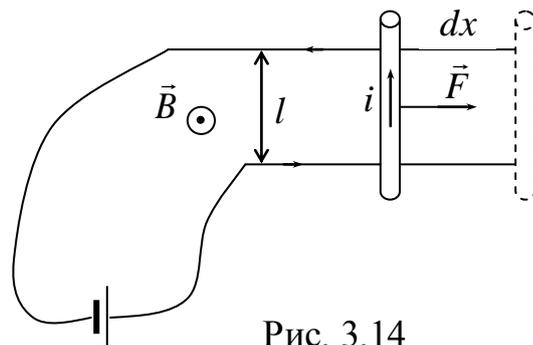


Рис. 3.14

нию проводника, то есть к совершению работы, которую легко найти как скалярное произведение силы Ампера на перемещение проводника. В случае прямого проводника длиной l , при его бесконечно малом перемещении dx сила Ампера совершит элементарную работу

$$dA = F_A dx \cos 0 = ilBdx. \quad (3.44)$$

Введём понятие *потока вектора магнитной индукции*, используя определение потока (1.2):

$$d\Phi = Bd \cos(\vec{B}, \vec{n}). \quad (3.45)$$

В нашем случае элемент поверхности da находится как произведение ldx , а угол между нормалью к поверхности направлением поля равен нулю. Тогда

$$dA = id\Phi, \quad (3.46)$$

т. е. работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна изменению потока магнитной индукции, происшедшему в процессе этого перемещения. Тот факт, что работа при движении проводника с током в магнитном поле отлична от нуля, казалось бы, противоречит тому, что сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле, не совершает никакой механической работы. Это кажущееся противоречие разрешается, если принять во внимание, что на самом деле работа совершается не магнитным полем, а источником тока.

3.11. Рамка с током в магнитном поле

Действие магнитного поля на помещённую в него рамку с током зависит от взаимного расположения рамки и тока. Рассмотрим последовательно три случая, соответствующие трём разным положениям рамки относительно поля.

На рис. 3.15 изображена рамка, плоскость которой перпендикулярна полю \vec{B} . Определяя направление амперовой силы, действующей на каждую из сторон рамки, убедимся, что при указанном направлении тока рамка будет растянута полем и при отсутствии жёсткости материала деформируется в круг. Если изменить направление либо поля, либо тока, рамка будет сжата магнитным полем.

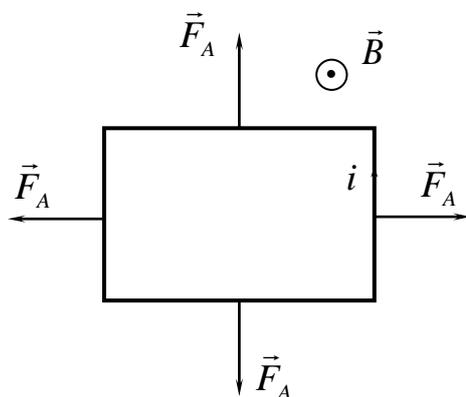


Рис. 3.15

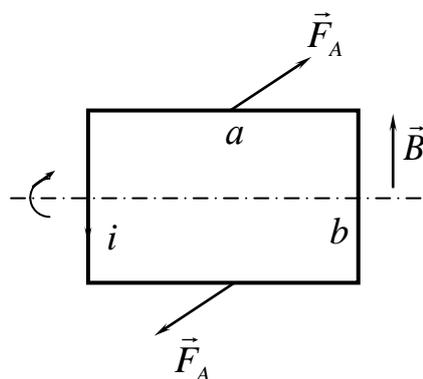


Рис. 3.16

На рис. 3.16 поле \vec{B} направлено параллельно двум сторонам рамки. На них амперова сила действовать не будет, поскольку угол между стороной рамки и полем равен нулю. На две стороны a рамки, перпендикулярные полю, будет

действовать пара сил и создавать вращающий момент, равный произведению F_A на длину стороны b . Если рамка имеет ось, проходящую через середины её сторон, то под действием момента сил рамка повернётся и встанет так, что её плоскость будет перпендикулярна полю \vec{B} . Интересен случай, когда поворот рамки сопровождается возникновением в подвесе упругих сил, возвращающих рамку в исходное положение. В этом случае рамка будет совершать колебания. Это не будут колебания материальной точки, кинематика и динамика которых рассмотрены в I ч. курса лекций, разделы 4.1 и 4.2. Но изложенные там закономерности легко перевести на язык законов, определяющих характер вращательного движения твёрдого тела, что вы и делали в I семестре, выполняя лабораторную работу по определению момента инерции тела методом крутильных колебаний.

Прежде, чем перейти к подробному описанию колебаний рамки, рассмотрим положение рамки, изображённое на рис. 3.17, когда угол между полем \vec{B} и нормалью к рамке имеет промежуточное значение γ . В этом случае амперова сила будет определяться не полем \vec{B} , а его составляющей B_{\parallel} , которая параллельна плоскости рамки и пропорциональна углу отклонения:

$$B_{\parallel} = B \sin \gamma \approx B \gamma, \quad (3.47)$$

если отклонения рамки невелики ($\gamma \ll 1$). Угол же между этой составляющей и сторонами a будет прямым, поэтому момент пары сил

$$M = F_A b = ia B_{\parallel} b = i B_{\parallel} S, \quad (3.48)$$

где S — площадь рамки.

Здесь уместно ввести новое понятие — *магнитный момент*. Последним называют произведение силы тока на площадь, им обтекаемую. Магнитный момент \vec{p}_m , как и момент силы, принято считать вектором, совпадающим с нормалью к рамке, если за её положительное направление выбрать направление поступательного движения буравчика, вращаемого по направлению тока:

$$\vec{p}_m = i S \vec{n}. \quad (3.49)$$

При наличии упругих возвращающих моментов возникнут колебания, и угол между нормалью к рамке и полем будет периодически меняться. Это движение можно описать уравнениями, аналогичными тем, что даны в I ч. при описании колебаний материальной точки:

$$\gamma = \gamma_m \cos \omega t \quad \text{и} \quad \ddot{\gamma} = -\omega^2 \gamma_m \cos \omega t, \quad (3.50)$$

где γ_m — максимальный угол отклонения; ω — циклическая частота колебаний.

Второй закон Ньютона для рассматриваемого случая будет выглядеть так:

$$i B_{\parallel} S = I \ddot{\gamma} \quad \text{или} \quad i S B \gamma = -I \omega^2 \gamma, \quad (3.51)$$

где I — момент инерции рамки относительно оси, проходящей через середины двух её сторон. Он может быть найден как сумма моментов двух стержней длиной b относительно оси, проходящей через их середину, плюс момент инерции двух стержней длиной a , расположенных параллельно оси вращения на расстоя-

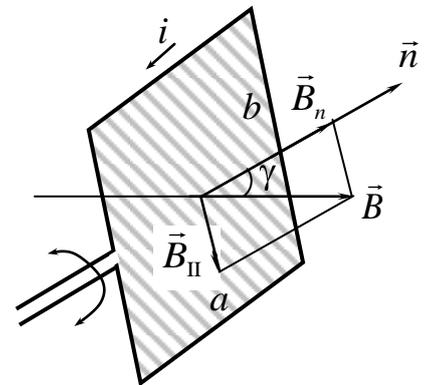


Рис. 3.17

нии $b/2$ от неё. Последнее уравнение даёт возможность по известным параметрам рамки и магнитного поля найти период колебаний. Можно решить и обратную задачу — по периоду колебаний рамки в магнитном поле найти его индукцию. Об использовании этого метода определения \vec{B} речь шла выше.

3.12. Электромагнитная индукция. Законы Фарадея и Ленца

Факту возникновения магнитного поля при движении электрических зарядов посвящён весь третий раздел этой части курса физики. Тем не менее, изложенный выше материал затрагивает лишь одну сторону вопроса: какие законы руководят появлением магнитного поля при протекании тока, оставляя в стороне вопрос о том, возможен ли обратный процесс, т.е. можно ли, имея магнитное поле, получить электрический ток, "превратить магнетизм в электричество", как говорил Фарадей. Эта обратная задача так же, как и прямая, была вначале решена экспериментально и лишь потом получила объяснение.

Магнитное поле в опытах [Фарадея](#) создавалось как постоянным магнитом, так и электромагнитом. В проводнике, замкнутом на гальванометр, возникал электрический ток в том случае, если проводник перемещался в магнитном поле, либо если изменялась индукция магнитного поля. Величина возникающего

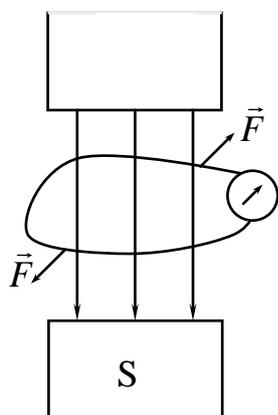


Рис. 3.18

тока, называемого *индукционным*, определялась скоростью перемещения проводника или быстротой изменения поля. Фарадей обратил внимание на то, что проводник можно оставлять неподвижным, но индукционный ток всё равно возникает, если контур, помещённый в магнитное поле, деформировать. Изготовив мягкую, легко деформируемую катушку, можно без труда повторить опыт Фарадея (рис. 3.18). Таким образом, при изменении площади контура, помещённого в магнитное поле, в нем также появляется индукционный ток. Из проведенных опытов Фарадей в 1832 году сделал вывод, что возникающая ЭДС пропорциональна быстроте изменения не индукции поля, а потока Φ (3.45) вектора магнитной индукции через контур, в котором возникает индукционный ток.

Позже была дана электронная теория явления. Пусть имеется металлический проводник, помещённый в магнитное поле, перпендикулярное плоскости чертежа (рис. 3.19). Проводник движется в этом поле со скоростью v , пересекая магнитные силовые линии. Свободные электроны в проводнике участвуют в хаотическом тепловом движении и имеют, кроме того, скорость v . Движения зарядов приводят к появлению сил Лоренца. Для каждого заряда их будет две: одна возникает вследствие теплового движения, на-

тока, называемого *индукционным*, определялась скоростью перемещения проводника или быстротой изменения поля. Фарадей обратил внимание на то, что проводник можно оставлять неподвижным, но индукционный ток всё равно возникает, если контур, помещённый в магнитное поле, деформировать. Изготовив мягкую, легко деформируемую катушку, можно без труда повторить опыт Фарадея (рис. 3.18). Таким образом, при изменении площади контура, помещённого в магнитное поле, в нем также появляется индукционный ток. Из проведенных опытов Фарадей в 1832 году сделал вывод, что возникающая ЭДС пропорциональна быстроте изменения не индукции поля, а потока Φ (3.45) вектора магнитной индукции через контур, в котором возникает индукционный ток.

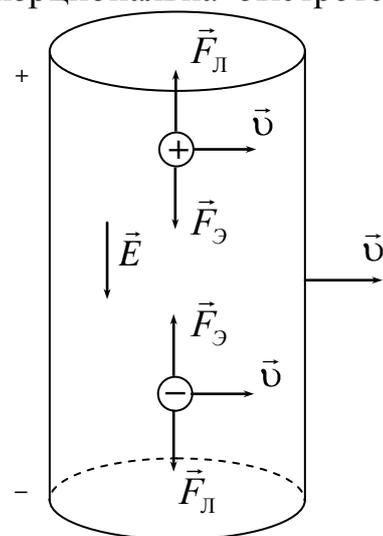


Рис. 3.19

правлена для каждого заряда в свою сторону, а вторая возникает в силу движения электронов вместе с проводником и направлена вдоль проводника для всех электронов одинаково. Сила Лоренца

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.52)$$

вызывает, следовательно, направленное движение электронов вдоль проводника, т.е. приводит к появлению тока, а значит и ЭДС. Согласно определению этой величины, она может быть найдена по работе сторонних (не электростатических) сил (2.94):

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} = \frac{\int \vec{F}_L \cdot d\vec{l}}{q} \quad (3.53)$$

Заменяя F_L её значением, получим

$$\mathcal{E} = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (3.54)$$

Заменяем скорость проводника производной от пути по времени, обозначая путь через h , и поменяем местами векторы \vec{v} и $d\vec{l}$. Тогда

$$\mathcal{E} = - \int \left[\frac{dh}{dt} \times d\vec{l} \right] \cdot \vec{B}, \quad (3.55)$$

где знак минус является результатом перестановки, произведённой для того, чтобы представить произведение $dh \times d\vec{l}$ как элемент площади, пересекаемой проводником при движении. Обозначим эту величину через δS , найдём её на рис. 3.20, и будем иметь в виду, что δS — это часть dS — площади, пересекаемой всем проводником за бесконечно малый промежуток времени dt . Выполнив вышесказанное, получим

$$\mathcal{E} = - \int \vec{B} \cdot \delta \vec{S} = - \int \frac{d\Phi}{dt}, \quad (3.56)$$

где $\delta\Phi$ — часть всего потока через пересекаемую проводником площадь, а $d\Phi = \int \delta\Phi$ — это полное изменение потока при перемещении замкнутого контура на величину dh . Следовательно

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.57)$$

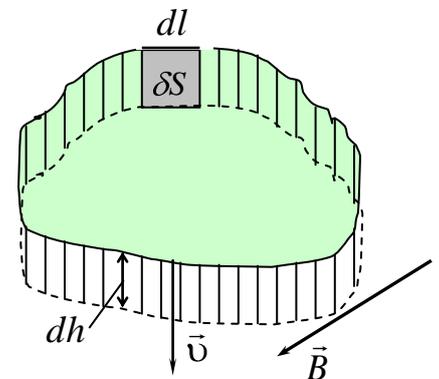


Рис. 3.20

Полученное равенство носит название *закона Фарадея*, а явление возникновения тока в проводнике при движении его в магнитном поле называется *электромагнитной индукцией*.

Знак минус в законе Фарадея имеет реальный физический смысл. Он даёт возможность определить направление индукционного тока, т.е. выражает *закон Ленца*. Действительно, если $d\Phi$ положительно, т.е. поток возрастает, ЭДС имеет знак минус, значит поле индукционного тока направлено противоположно тому полю, которое его вызвало. Если $d\Phi$ отрицательно, т.е. поток убывает, значит ЭДС положительна, и магнитное поле направлено по направлению основного.

Таким образом, индукционный ток всегда создает поток сквозь контур, *противодействующий* тем изменениям, которые вызвало изменение тока в нем. Иначе говоря, здесь прослеживается замеченное нами еще в разделе механики стремление любой системы сохранить своё состояние.

Зная направление магнитного поля индукционного тока, можно, пользуясь правилом буравчика, определить направление самого индукционного тока. Рассмотрим несколько примеров: на рис. 3.21 изображён случай, когда контур перемещается со скоростью v в неоднородном, убывающем слева направо, поле. Поток через контур в этом случае убывает. Поле индукционного тока должно компенсировать это убывание, и, следовательно, будет направлено вверх. Направление индукционного тока определится правилом буравчика.

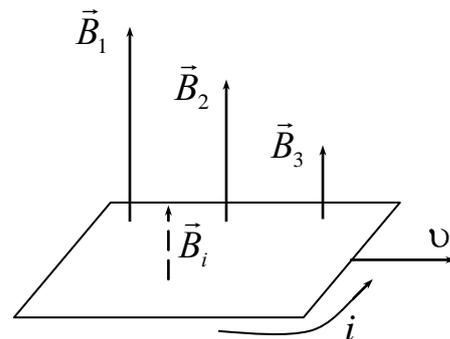


Рис. 3.21

На рис. 3.22 изображена схема опыта, когда кольцо, изготовленное из проводящего материала, опускается на катушку с током, создающим магнитное поле, силовые линии которого показаны на рисунке. Поток магнитной индукции через кольцо в этом случае возрастает, значит поле индукционного тока будет стремиться его уменьшить. Система вновь противодействует происходящему изменению.

И, наконец, пусть рамка вращается в магнитном поле (рис. 3.23). Учтите, что в рассматриваемом ранее случае по рамке протекал ток, и возникающие в маг-

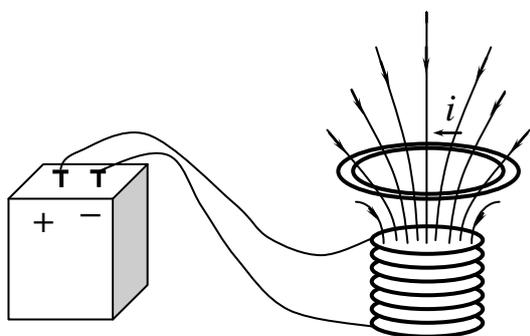


Рис. 3.22

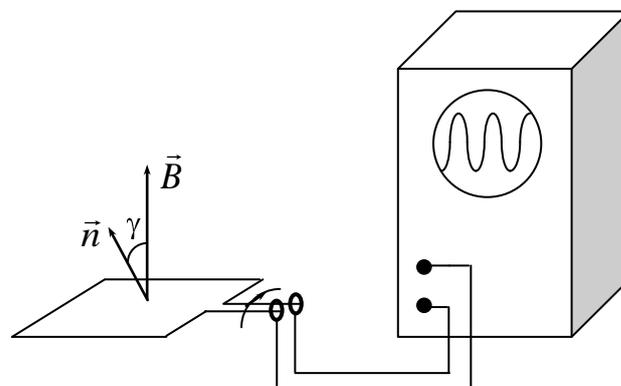


Рис. 3.23

нитном поле силы её поворачивали. Теперь же рамку вращают внешние механические силы, при этом поток через её площадь меняется. В положении, изображённом на рисунке, он возрастает и достигает максимума, когда нормаль к рамке совпадает с полем. После этого он начнёт уменьшаться, т.е. будет периодически меняться. Индукционный ток в рамке при возрастании потока будет иметь одно направление, при убывании же изменит своё направление на противоположное. Можно показать, что напряжение на концах проводников, идущих от рамки, будет меняться по гармоническому закону и по цепи, подключенной к ним, потечёт

переменный ток. Следовательно, равномерно вращающаяся в магнитном поле рамка с током — это простейший генератор переменного тока.

Полный вывод закона изменения индукционного тока со временем мы отнесём на практические занятия. Здесь мы лишь заметим, что для решения вопроса нужно воспользоваться определением потока вектора магнитной индукции (3.44). Ясно, что поток вектора магнитной индукции через площадь рамки пропорционален косинусу угла γ , который при равномерном вращении рамки с угловой скоростью ω может быть найден просто как произведение этой скорости на время.

3.13. Взаимо- и самоиндукция

Выше мы назвали электромагнитной индукцией явление возникновения электрического тока при движении магнитного поля и проводящего контура относительно друг друга. Это движение должно быть таким, чтобы поток магнитной индукции через контур изменялся. Нетрудно представить себе ситуацию, когда изменение потока через контур будет меняться и без относительного перемещения контура и поля.

Рассмотрим контур, по которому протекает ток (назовём его первичным). Магнитное поле этого тока будет пронизывать любой другой контур, расположенный вблизи первого (рис. 3.24). Величина потока, пронизывающего вторичные контуры, будет определяться прежде всего их расположением. Так, через третий контур поток будет много меньше, чем через второй. Но в любом случае поток будет зависеть от поля \vec{B} , а оно создаётся током в первом контуре. Таким образом, для любого контура, расположенного вблизи первичного, будет справедливо соотношение

$$\Phi_{вз} = Mi, \quad (3.58)$$

утверждающее пропорциональность между потоком через контур и током, создающим этот поток. Для каждого вторичного контура M имеет своё значение, и носит название *коэффициента взаимной индукции* двух контуров. Помимо взаимного расположения контуров он зависит ещё от их размеров и формы, а также от магнитных свойств среды преимущественно внутри контуров.

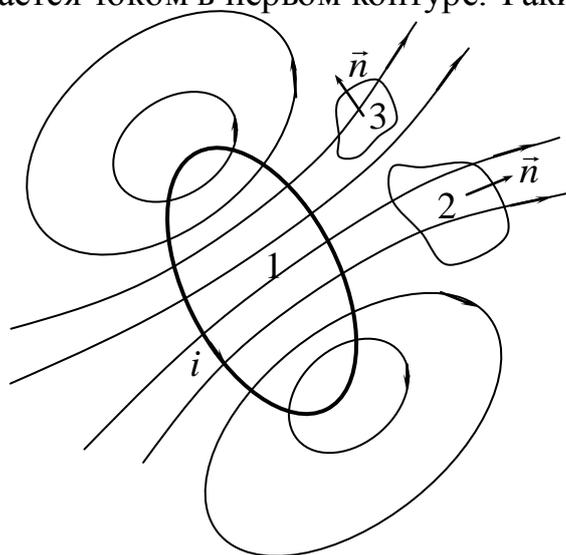


Рис. 3.24

Если поток, пронизывающий вторичный контур, не будет постоянен во времени, то по закону электромагнитной индукции во вторичном контуре возникнет индукционный ток. Это может случиться, если первичный ток будет меняться — возрастать или уменьшаться, либо меняться периодически. Найдя

быстроту изменения потока $\Phi_{вз}$ из (3.58) и подставив её в закон Фарадея, получим

$$\mathcal{E}_{вз} = -M \frac{di}{dt}. \quad (3.59)$$

Чем больше быстрота изменения тока в первичном контуре, тем больше ЭДС во вторичном. Знак минус, как и прежде, определяет направление возникающего индукционного тока: при возрастании тока в первичной цепи di положительно, а ЭДС — отрицательна, т.е. будет создавать во втором контуре ток, направленный противоположно основному. При убывании же тока в первичном контуре индукционный ток во вторичном будет иметь то же направление, что и основной ток. Рассматриваемое нами явление возникновения тока во вторичном контуре носит название явления *взаимоиндукции*. Оно не только подтверждено опытом, но и широко используется в практике трансформации переменных токов и напряжений.

Явление *самоиндукции* аналогично явлению взаимоиндукции. Только в этом случае рассматривается возникновение ЭДС индукции в *том же контуре*, по которому протекает первичный ток. Магнитный поток через собственный контур пропорционален току в нем:

$$\Phi_c = Li, \quad (3.60)$$

где L — *индуктивность контура* (коэффициент самоиндукции), зависящая, подобно коэффициенту взаимной индукции, от размеров, формы контура и среды.

Находя производную от потока (3.60) по времени и подставив в закон Фарадея, получим для ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}. \quad (3.61)$$

Знак минус является, как и в законе электромагнитной индукции, выражением закона Ленца. Так же, как и взаимоиндукция, самоиндукция имеет место лишь в том случае, если есть изменение тока во времени. Последнее бывает при протекании переменного тока и при замыкании и размыкании цепи.

Самоиндукция приводит к появлению *экстратокков* замыкания и размыкания. В момент замыкания цепи ток возрастает от нуля и индукционный ток должен, согласно правилу Ленца, компенсировать эти изменения, т.е. он направлен против основного. Поэтому ток в цепи, содержащей индуктивность, увеличивается не скачком, а постепенно. При размыкании цепи ток также уменьшается постепенно, поскольку индукционный ток направлен в сторону основного тока, т.е. поддерживает его, препятствуя убыванию. Явление самоиндукции имеет место в любом проводнике, по которому течет переменный ток. И чем больше di/dt , то есть частота, тем сильнее индукционные токи.

Возникновение индукционных токов при протекании по цепи переменного тока при достаточно большой частоте изменения тока следует учитывать. Так, например, для быстро переменных токов плотность тока не остаётся постоянной по сечению проводника: в центре его плотность тока существенно меньше, нежели на поверхности проводника. Явление носит название *скин-эффекта* и

используется для поверхностной закалки деталей: через них пропускают быстропеременный ток, и поверхность детали, по которой он протекает, разогревается, тогда как середина остается холодной. Быстрое охлаждение приводит к закалке только разогретой части, т.е. поверхности детали.

3.14. Трансформация постоянных токов

Использование взаимной индукции для трансформации переменных токов известно практически каждому: первичная обмотка трансформаторов надета на один сердечник со вторичной обмоткой, в которой индуцируется электрический ток. В зависимости от соотношения числа витков первичной и вторичной обмоток трансформатор может быть либо повышающим напряжение, либо понижающим его. Ферромагнитный сердечник вводится для увеличения коэффициента взаимной индукции, который существенно зависит от среды. Основой для расчетов трансформаторов служит уравнение взаимной индукции (3.59), которое свидетельствует о том, что во вторичном контуре ЭДС индукции появляется всегда, когда по первичному контуру протекает ток, меняющийся во времени. Мы привыкли считать, что это переменный ток, изменяющийся по синусоидальному закону. Но если в первичной цепи с источником постоянного напряжения поставить прерыватель, непрерывно включающий и выключающий ток, то по ней потечет тоже изменяющийся ток, но не меняющий свое направление. Его называют пульсирующим. Тогда во вторичном контуре появится индукционный ток, пропорциональный скорости изменения тока в первичном контуре. Пусть изменение его с течением времени имеет форму треугольника (рис. 3.25а). Нетрудно показать, что импульсы тока i_2 , пропорционального скорости изменения тока в первичном контуре ($i_2 \sim -di_1/dt$), будут в этом случае иметь прямоугольную форму (см. рис. 3.25б), причем направление тока i_2 будет уже переменным.

3.15. Единицы измерения магнитных величин

Единицы измерения электрических величин — заряда, тока, потенциала были установлены до того, как были открыты законы электромагнетизма. Вводимые этими законами единицы измерения магнитных величин устанавливаются поэтому на основе известных электрических единиц.

1. Магнитный поток Φ связан с электродвижущей силой законом Фарадея. Единица измерения потока в системе единиц СИ носит название [вебер](#) и обозначается Вб. 1 вебер — это такой поток, изменение которого до нуля за 1 секунду вызывает появление ЭДС величиной в 1

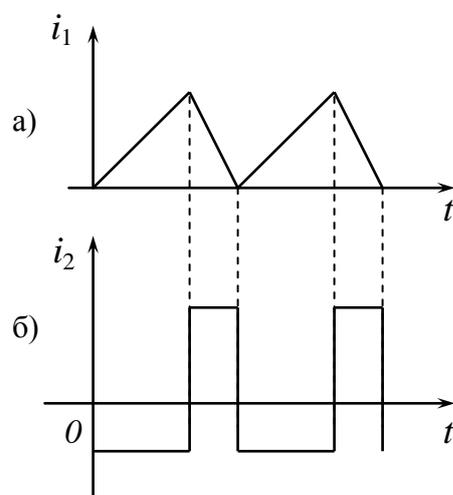


Рис. 3.25

вольт. Из закона электромагнитной индукции следует, что $1 \text{ Вб} = 1 \text{ В}\cdot\text{с}$.

2. *Индуктивность* L , так же, как и коэффициент взаимной индукции M , измеряется в генри (Гн). Основанием для выбора этой единицы измерения вновь послужил закон Фарадея, но записанный для взаимоиндукции (3.59) и для самоиндукции (3.61). Ясно, что оба уравнения дадут одинаковую размерность и величину для этой единицы. 1 генри — такая индуктивность контура, при которой изменение тока в нём со скоростью 1 ампер за 1 секунду вызовет появление в контуре ЭДС в 1 вольт. Нетрудно показать, что $1 \text{ Гн} = 1 \text{ В}\cdot\text{с}/\text{А}$

3. *Магнитная индукция* B измеряется в системе СИ в тесла (Тл). Основанием для введения этой единицы служит определение потока магнитной индукции (3.44). Тесла — такая магнитная индукция, поток которой через 1 кв. метр равен одному веберу, т.е. $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Вб}/\text{м}^2$.

4. *Напряжённость магнитного поля* H измеряется в *амперах на метр* (А/м). Эта единица, как уже отмечалось ранее, установлена по (3.21), независимо от остальных единиц измерения магнитных величин.

3.16. Вычисление индуктивности

Коэффициенты взаимоиндукции и самоиндукции зависят от формы проводников и их взаимного расположения, поэтому в каждом конкретном случае они имеют разные значения. Их вычисление ведётся всегда по одной и той же схеме, основанием для которой служат уравнения, вводящие понятия этих величин (3.58) и (3.60), которые, вообще говоря, эквивалентны друг другу: правая часть уравнений содержит ток, создающий поле, и соответствующий коэффициент и поэтому всегда одна и та же. Левую часть — поток — следует раскрыть применительно к каждому конкретному случаю и затем подставить в определения (3.58) и (3.60). Рассмотрим, как это делается, на примере вычисления индуктивности соленоида. Весь магнитный поток через соленоид определяется не только магнитной индукцией и площадью сечения, но и числом витков, площадь которых пересекают линии магнитной индукции:

$$\Phi = BSN, \quad (3.62)$$

где S — площадь сечения соленоида или площадь сечения одного витка, а N — число витков.

Используя связь B с напряжённостью магнитного поля (3.18) и выражение для вычисления напряжённости поля соленоида (3.36), получим

$$B = \mu\mu_0 \frac{iN}{l}; \quad \Phi = \mu\mu_0 \frac{iN^2}{l} S. \quad (3.63)$$

Подставив полученное значение Φ в (3.60) вместо Φ_c , найдем индуктивность соленоида:

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu\mu_0 n^2 V, \quad (3.64)$$

где n — плотность намотки; V — объём соленоида. Как и следовало ожидать, индуктивность соленоида определяется его объёмом, плотностью намотки (числом витков на единицу длины), а также материалом сердечника (средой), магнитная проницаемость которого может весьма существенно изменить индуктивность. Обычно для сердечников используют *ферромагнетики* (железо, никель, кобальт и сплавы на их основе), у которых большая магнитная проницаемость: $\mu = 10^2 \dots 10^5$.

Коэффициент взаимной индукции двух витков, имеющих общий центр, находится по этой же схеме: пусть по внешнему витку радиуса R_1 (рис. 3.26) протекает ток i . Он создает внутри него поле, напряжённость которого в центре витка легко находится по закону Био — Савара (3.17), поскольку в процессе интегрирования r остается постоянным и равным R_1 , а угол $\alpha = 90^\circ$:

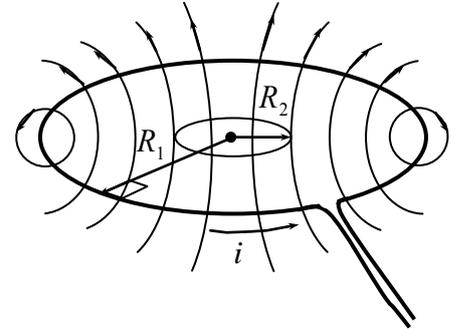


Рис. 3.26

$$H = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{idl}{R_1} = \frac{i}{2R_1} \quad \text{и} \quad B = \mu\mu_0 \frac{i}{2R_1}. \quad (3.65)$$

Если радиус второго витка $R_2 \ll R_1$, то изменением величины B в пределах площади этого витка можно пренебречь. Тогда поток вектора магнитной индукции через второй виток найдем умножением полученного выражения на его площадь:

$$\Phi = \mu\mu_0 \frac{i}{2R_1} \pi R_2^2 \quad \text{и} \quad M = \frac{\Phi}{i} = \mu\mu_0 \frac{\pi R_2^2}{2R_1}. \quad (3.66)$$

Вновь в выражение для коэффициента взаимной индукции вошли размеры контуров и характеристика среды — магнитная проницаемость μ .

3.17. Энергия магнитного поля

Магнитное поле так же, как и поле электрическое, являясь формой материи, должно обладать энергией. Поскольку все превращения в природе происходят с выполнением закона сохранения энергии, построим свои рассуждения именно на нем: пока нет тока, нет и магнитного поля. Возникновение тока связано с совершением работы источника, которая затрачивается как на создание тока, так и на создание магнитного поля.

Рассмотрим частный случай: пусть магнитное поле возникает в соленоиде при возрастании тока в нем от 0 до i . При этом источник ЭДС за время dt совершает работу по перемещению заряда

$$dA = i\mathcal{E}dt. \quad (3.67)$$

Поскольку ток i — возрастающий, то в цепи индуцируется ток i_i , направленный против основного тока:

$$dA = (i - i_i)\mathcal{E}dt. \quad (3.68)$$

Выразив индукционный ток по закону Ома через ЭДС самоиндукции, равную $-L(di/dt)$, и сопротивление контура R , получим

$$dA = \left(i + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} \right) \mathcal{E} dt \quad (3.69)$$

или, если выразить силу тока как ЭДС, делённую на сопротивление,

$$dA = i\mathcal{E}dt + Lidi. \quad (3.70)$$

С возникновением магнитного поля связан второй член, поскольку $i\mathcal{E}dt$ — энергия, выделившаяся в виде тепла, об этом шла речь во втором разделе настоящего курса (см. 2.14, п.2). Работа, затраченная на создание магнитного поля при возрастании тока до i будет

$$A = W_M = \int_0^i iLdi = \frac{Li^2}{2}. \quad (3.70)$$

Если возрастающий ток протекал по соленоиду, можно подставить значение L для соленоида из (3.64), тогда

$$W_M = \frac{\mu\mu_0 N^2 Si^2}{2l} \quad (3.71)$$

Умножив числитель и знаменатель на l , заменив произведение Sl объемом V и введя H для соленоида, получим

$$W_M = \mu\mu_0 \frac{H^2}{2} V; \text{ и плотность энергии } w = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2. \quad (3.72)$$

Энергия магнитного поля определяется квадратом его напряжённости и пропорциональна объёму поля. Плотность энергии w пропорциональна квадрату напряжённости поля, как и в электростатическом поле.

4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

4.1. Обобщение Максвеллом закона полного тока.

Гипотеза о токе смещения

Физика девятнадцатого столетия ознаменовалась открытием законов электромагнетизма и установлением возможности взаимных переходов электрического тока и магнитного поля. Законы этих переходов связывают электрический ток с магнитным полем, но не содержат характеристик электрического поля, хотя хорошо известно, что существование тока без последнего невозможно. На это несоответствие обратил внимание [Джеймс Максвелл](#) в середине прошлого века, познакомившись с трудами Фарадея. Его сугубо теоретические исследования привели к необходимости высказать целую цепь гипотез, которые нашли подтверждение только в конце века. Окончательное подтверждение этих гипотез относится к двадцатым годам двадцатого столетия. Опыты, поставленные с целью подтвердить Максвелловские гипотезы, положили начало глубоким изменениям не только в науке, но и в технике, кардинальным образом повлиявшим на условия нашей жизни.

Законы, выражающие связь *магнитных полей* с электрическим током зависят от формы того проводника, по которому течет ток, т. е. лишены общности. Закон полного тока (3.31) в этом смысле выделяется из них, выражает свойство непотенциальности магнитного поля, поэтому может быть признан за один из фундаментальных законов. Но и он свидетельствует о возможности создать магнитное поле лишь вблизи проводника. В диэлектрике нет зарядов, способных свободно перемещаться, поэтому в них невозможно создать ток, следовательно, не может существовать и магнитное поле. Максвеллу такая ситуация представилась нелогичной: поле не связано непосредственно с проводником, значит, его возникновение не должно зависеть от среды. Более того, само направленное движение возможно лишь при наличии *электрического* поля \vec{E} , для которого среда не должна служить препятствием.

Внимательный взгляд на хорошо известную нам теорему Гаусса (2.13) подтверждает эту мысль: используемое в ней понятие потока вектора напряжённости приложимо *только к полю*. Поток через замкнутую поверхность S , согласно этой теореме, связан с зарядом, создающим поле. Поэтому, используя определение потока (2.13), упомянутую теорему можно записать иначе, выразив заряд, создающий поле, через напряжённость:

$$q = \varepsilon \varepsilon_0 \Phi = \varepsilon \varepsilon_0 ES, \quad (4.1)$$

если напряжённость во всех точках поверхности одинакова и перпендикулярна поверхности. Из определения силы тока и последнего равенства получаем

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(\varepsilon \varepsilon_0 ES)}{dt} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} S, \quad (4.2)$$

то есть сила тока через поверхность S пропорциональна скорости изменения напряжённости электрического поля.

Оказывается, что ток не обязательно связан с зарядом. Он может создаваться также *изменяющимся во времени электрическим полем*. Этот ток Максвелл назвал *током смещения*. В отличие от тока проводимости он может существовать и в вакууме, и в диэлектрике. Но так же, как и обычный ток, он должен создавать магнитное поле. Если не допускать существования тока смещения, то цепь оказывается разомкнутой, как только в нее вставить конденсатор. В самом деле, между обкладками конденсатора содержится диэлектрик, и ток по нему протекать не может. Это имеет место для случая, когда по цепи течет постоянный ток. Для этого случая и поле постоянно, то есть производная от E по t равна нулю. Для переменного тока величина напряжённости меняется, и производная отлична от нуля. По диэлектрику между обкладками конденсатора потечет ток смещения, цепь замкнется, несмотря на наличие диэлектрика. Тот факт, что переменный ток течет по цепи, содержащей конденсаторы, известен всем, кто имеет дело с электрическими цепями. Исторически ток смещения был впервые обнаружен Эйхенвальдом в 1901 году в Петербурге по его действию на магнитную стрелку, подвешенную над конденсатором, к которому подводилось переменное напряжение высокой частоты (рис. 4.1).

Высказанное предположение о возможности существования тока в диэлектрике получило название *первой Максвелловской гипотезы*, которая была таковой вплоть до 1901 года, то есть почти полвека. Выражение (4.2) есть математическая формулировка этой гипотезы.

Итак, если воспользоваться гипотезой о существовании тока смещения, закон полного тока (3.31) можно записать в виде

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} dS. \quad (4.3)$$

Полученное уравнение является обобщенным законом, поскольку использует гипотезу о токе смещения и имеет место в любой среде, а не только там, где протекает ток. Более того, в уравнении мы впервые встречаемся с непосредственной связью двух полей — электрического и магнитного, с фактом возможности перехода одного поля в другое. Нетрудно, пользуясь понятием циркуляции вектора (1.8), показать, что изменение вектора \vec{E} во времени приводит к появлению не постоянного, а переменного по координате магнитного поля \vec{H} .

Для того, чтобы использовать понятие циркуляции вектора \vec{H} , рассмотрим рис. 4.2. Начиная обход по контуру, помним, что начинать его лучше из точки, ближайшей к началу координат. Помним также, что проекция имеет положительный знак, если направление обхода совпадает с направлением оси!

На рис. 4.2 изображена система координат с тремя осями, показан ток i , текущий по оси z и силовая линия магнитного поля, лежащая в плоскости xOy и проходящая через точку A . В этой же плоскости изображен контур со сторонами dx и dy и показаны проекции на эти стороны вектора \vec{H} , касательного к силовой линии. Обратите внимание, что проекций у вектора \vec{H} только две, то есть мы будем рассматривать лишь двумерный случай:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta S - \frac{\partial H_x}{\partial y} \Delta S, \quad (4.4)$$

где $\Delta S = \Delta x \Delta y$ — площадь контура.

Предлагаем читателю, пользуясь (1.7), получить это уравнение непосредственно из чертежа. Заменяя полученным уравнением круговой интеграл в обобщенном законе полного тока (4.3), получим *первое уравнение Максвелла*:

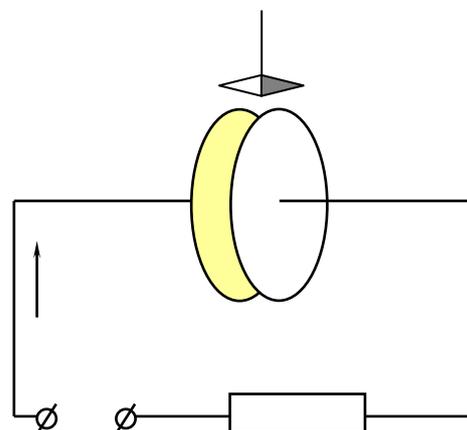


Рис. 4.1

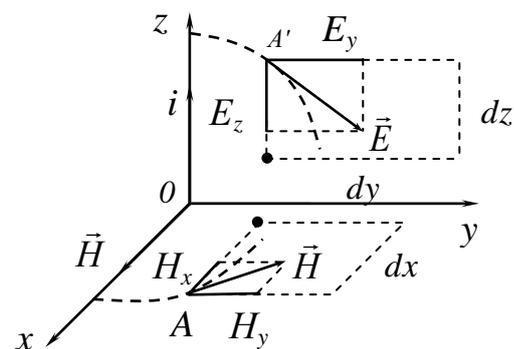


Рис. 4.2

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{dE_z}{dt}. \quad (4.5)$$

Уравнение является обобщением закона полного тока и содержит утверждение, что меняющееся по времени электрическое поле создаёт меняющееся по координате магнитное. Тот факт, что мы рассматриваем лишь упрощенный двумерный случай и не используем весь математический аппарат теории поля, делает это уравнение по внешнему виду несколько отличным от того, который обычно приводится в учебниках.

4.2. Обобщение Максвеллом закона электромагнитной индукции.

Гипотеза о существовании вихревого электрического поля

Закон электромагнитной индукции, решающий обратную задачу электромагнетизма — переход от магнитного поля к электрическому току содержит тот же принципиальный недостаток, связанный с экспериментальным происхождением закона: магнитное поле, меняющееся во времени, можно создать в любой среде, а индукционный ток возникает лишь при наличии проводника, в котором могут перемещаться заряды. Возникнут ли те условия, которые приводят в движение свободные заряды и в том случае, если этих зарядов нет? Заряды движутся направленно в том случае, если есть поле \vec{E} , а оно, как и магнитное, может существовать всюду, а не только в проводнике. Следуя этой логике, Максвелл выдвигает предположение, что *переменное магнитное поле приводит к появлению поля электрического*. Если в это поле внести проводник, заряды начинают двигаться, что мы и обнаруживаем на опыте. Силовые линии этого электрического поля, в отличие от электростатического поля, созданного зарядами, являются замкнутыми кривыми, расположенными в плоскости, перпендикулярной магнитному полю и образуют с ним левовинтовую систему (рис. 4.3).

Сформулированное выше положение вновь гипотетично, требует экспериментального подтверждения и носит название *второй Максвелловской гипотезы* (1864). Непотенциальность индукционного электрического поля \vec{E}^* приводит к созданию электродвижущей силы

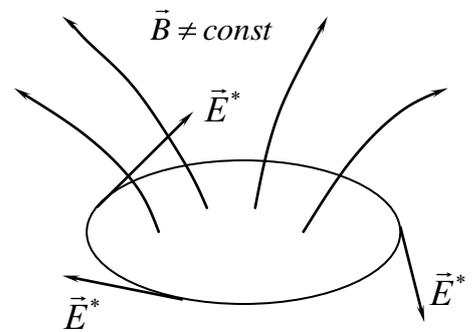


Рис. 4.3

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}^* d\vec{l}. \quad (4.6)$$

Это уравнение есть математическая формулировка второй Максвелловской гипотезы.

Гипотеза Максвелла о существовании вихревого электрического поля \vec{E}^* получила экспериментальное подтверждение позже. В наше время вихревое электрическое поле используется в ускорителях легких частиц — *бетатронах*.

Совместив уравнение, выражающее гипотезу о существовании электрического поля, с законом электромагнитной индукции, получим

$$\oint \vec{E}^* d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (4.7)$$

Этот *обобщённый закон электромагнитной индукции* отличается от прежнего тем, что в нём говорится о связи не магнитного поля и тока, а о связи двух полей, которые могут существовать в любой среде.

Вновь используя понятие циркуляции вектора и опираясь на рис. 4.2, можно показать, что переменное во времени магнитное поле приводит к возникновению не постоянного, а переменного по координате электрического поля. Заменим круговой интеграл в левой части (4.7) частными производными:

$$\oint \vec{E}^* d\vec{l} = \frac{\partial E_z}{\partial y} dS - \frac{\partial E_y}{\partial z} dS, \quad (4.8)$$

где dS есть площадь контура, равная $dzdy$. Получая (4.8), помните (см. рис. 4.2), что поле \vec{B} , направленное по оси X — переменное, а силовая линия, проведённая через точку A , определяется правилом левого буравчика, как того требует гипотеза. Обход по контуру начат из точки, ближайшей к началу координат.

Заменяя в обобщённом законе электромагнитной индукции интеграл через производные, получим второе *Максвелловское уравнение*:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}. \quad (4.9)$$

Вы поняли, конечно, что при переходе от (4.7) к (4.9) в правой его части поток был выражен через магнитную индукцию, а она, в свою очередь, заменена напряжённостью H . Уравнение вновь получено для двумерного случая, представляет обобщение закона электромагнитной индукции и содержит утверждение, что *меняющееся во времени магнитное поле приводит к появлению меняющегося по координате электрического поля*.

Обратите внимание на то, что поля перпендикулярны друг другу, а ток i на рис. 4.2 не может быть постоянным, иначе напряжённость магнитного поля тоже будет постоянной и вихревое электрическое поле не возникнет.

4.3. Гипотеза о существовании электромагнитного поля.

Электромагнитная волна, скорость её распространения

Полученные выше два уравнения Максвелла свидетельствуют, что возникновение переменного во времени магнитного поля приводит к возникновению электрического, переменного по координате. Верно и обратное: возникновение переменного электрического поля вызывает появление магнитного. Поля оказываются взаимосвязанными. *Совокупность магнитного и электрического полей Максвелл назвал электромагнитным полем*. Оно должно иметь две векторные характеристики — две напряжённости \vec{E} и \vec{H} , перпендикулярные друг другу. Существование электромагнитного поля вновь гипотетично, и является *третьей гипотезой Максвелла*. В максвелловских уравнениях содержатся не только признаки этого поля, но и возможный способ его создания: *возникновение электромагнитного поля связано с наличием ускоренно движущихся зарядов*. Если ток i — переменный (движение зарядов всё время меняется), возникающее маг-

нитное поле будет тоже переменным, значит, вызовет появление электрического поля и т.д. Более того, величина возникающего поля определяется быстротой изменения тока i , то есть электромагнитное поле проще обнаружить, создавая переменный ток высокой частоты.

В случае, если электромагнитное поле будет иметь возможность распространяться, возникнет *электромагнитная волна*. Предположение о её возможном существовании содержится в уравнениях (4.5) и (4.9), в которые входят меняющиеся по координате и времени напряженности полей. Оно является *четвёртой гипотезой Максвелла* (1865), об опытном подтверждении которой речь пойдёт дальше.

Прежде, чем перейти к получению уравнения электромагнитной волны и вычислению скорости её распространения, восстановите в памяти или повторите понятие волнового движения, данное в разд. 4.7 1-й части.

В целях максимального упрощения уравнений отойдём ещё раз от более полного и строгого вывода, сохраняя при этом возможность получения важного для нас вывода о новом физическом явлении. В уравнениях (4.5) и (4.9) положим, что поля постоянны по всем направлениям, кроме направления по оси Y , тогда не равны нулю будут только производные по координате y , общей для двух полей (см. рис. 4.2). Тогда частные производные могут быть заменены полными, и уравнения примут вид

$$\frac{dE}{dy} = -\mu\mu_0 \frac{dH}{dt}; \quad -\frac{dH}{dy} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE}{dt}. \quad (4.10)$$

Для упрощения записи индексы y проекций здесь опущены, но поля E и H взаимно перпендикулярны, причем электрическое поле направлено по оси Z , а магнитное — по оси X .

Уравнение волны должно содержать вторые производные от одной и той же величины по времени и по координате. Постоянная, стоящая перед производной по времени, есть величина, обратная квадрату скорости распространения этой волны (ч.1, р. 4.7). Такое уравнение для напряжённости электрического поля нетрудно получить, продифференцировав первое из уравнений (4.10) по y , а второе — по t :

$$-\frac{d^2E}{dy^2} \frac{1}{\mu\mu_0} = \frac{d^2H}{dt dy}; \quad -\frac{d^2H}{dy dt} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{d^2E}{dt^2}, \quad (4.11)$$

откуда

$$\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{d^2E}{dt^2} = \frac{d^2E}{dy^2}. \quad (4.12)$$

Мы получили уравнение волны, где меняющейся (колеблющейся) величиной будет напряжённость электрического поля E . Сравнивая его с уравнением механической волны, убеждаемся, что

- 1) скорость распространения волны

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}}; \quad (4.13)$$

2) решение уравнения запишется в виде

$$E = E_m \cos \left[\omega \left(t - \frac{y}{v} \right) + \varphi_0 \right], \quad (4.14)$$

где ω есть параметр, связанный с периодом колебаний напряженности E , и именуемый циклической частотой.

Дифференцируя (4.10) в ином порядке — первое уравнение по t , а второе — по y , получим аналогичное уравнение, но задающее характер изменения магнитного поля, распространяющегося с той же скоростью:

$$\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{d^2 H}{dt^2} = \frac{d^2 H}{dy^2}, \quad (4.15)$$

и его решение:

$$H = H_m \cos \left[\omega \left(t - \frac{y}{v} \right) + \varphi_0 \right]. \quad (4.16)$$

Поскольку переменные поля E и H всегда связаны друг с другом, то и возникающая магнитная и электрическая волна неразделимы. Максвелл назвал их совокупность *электромагнитной волной*. Она поперечна (рис. 4.4), поскольку E и H перпендикулярны оси Y , вдоль которой распространяется волна. Плоская электромагнитная волна описывается совокупностью уравнений (4.12) и (4.15) и их решений (4.14) и (4.16).

На рис. (4.4а) изображены векторы \vec{E} и \vec{H} , задаваемые этими уравнениями, в момент времени $t = 0$. Рис. 4.4б даёт вид тех же векторов, но через $t = T/2$ секунд, т.е. через полпериода. С течением времени картинка векторов сдвигается вдоль оси y , т.е. поля распространяются вдоль этой оси. Если же зафиксировать точку на оси y , то в ней величина и направление векторов будут периодически меняться.

Скорость распространения электромагнитной волны задаётся уравнением (4.13). Если взять значения постоянных ϵ_0 и μ_0 из таблиц и найти величину, обратную корню квадратному из их произведения, получим значение скорости электромагнитной волны в вакууме: $3 \cdot 10^8$ м/с, что равно скорости света в вакууме. (Проверьте расчёт и единицу измерения!). Этот совершенно неожиданный и удивительный результат свидетельствует, что в пустоте, где ϵ и μ равны единице, электромагнитная волна распространяется со

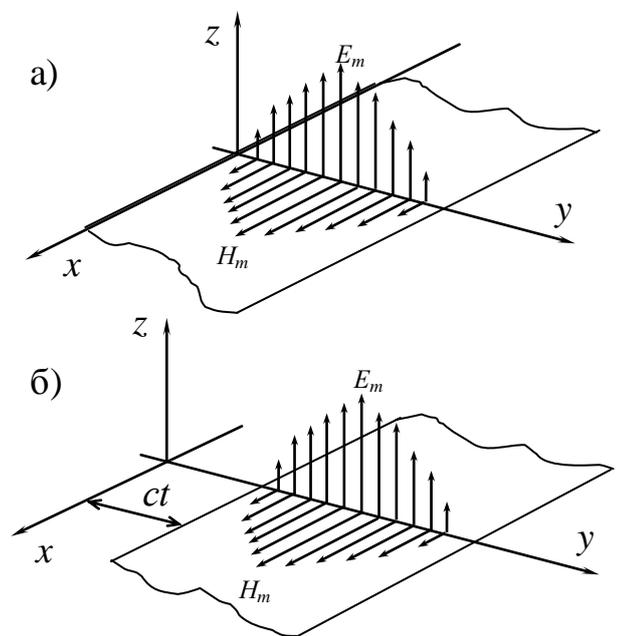


Рис. 4.4

скоростью света. Максвелл не посчитал это совпадение случайным и выдвинул ещё одну — *пятую гипотезу: свет есть электромагнитная волна* (1865). Тогда скорость электромагнитной волны в веществе

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (4.17)$$

где c — традиционное обозначение скорости света в пустоте. Следовательно, согласно последней гипотезе, на распространение света должны влиять электрические и магнитные свойства среды, через которую проходит свет. Свет, как и электромагнитная волна, должен быть волной поперечной, т.е. будет испытывать поляризацию. Частота ω , так же как и длина $\lambda = 2\pi v/\omega$ электромагнитной волны, в принципе, может быть любой, от нуля до бесконечности.

Во времена Максвелла, в середине девятнадцатого столетия, и уравнения и гипотезы, им высказанные, казались глубокой абстракцией, совершенно не связанной с практикой, несмотря на всю красоту и стройность системы его уравнений и гипотез. Теперь постараемся показать, как их опытное подтверждение привело к тому, что без предсказанных Максвеллом явлений современный образ жизни (по крайней мере, в развитых странах) был бы немислимым.

4.4. Шкала электромагнитных волн

Колебания электрических и магнитных полей, их взаимная связь и переход одного поля в другое известны нам ещё из школьного курса физики. Соединив конденсатор с катушкой, имеющей индуктивность L , мы получим простейший колебательный контур. На рис. 4.5а изображен такой контур в момент, когда конденсатор заряжен, т.е. в нём создано электрическое поле, энергия которого может быть выражена через величину заряда q_0 и ёмкость C конденсатора [см. выражения (2.69), (2.70)].

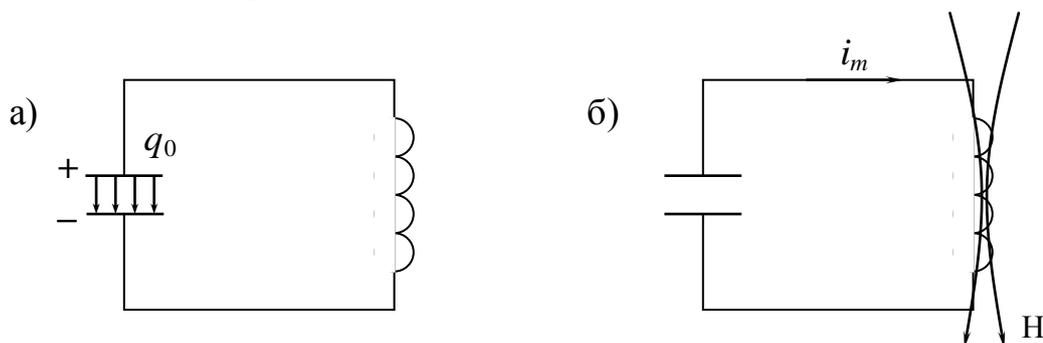


Рис. 4.5

Поскольку пластины конденсатора замкнуты на катушку, он сразу начинает разряжаться и по цепи потечёт увеличивающийся ток, скачкообразному возрастанию которого препятствует возникающая в катушке ЭДС самоиндукции. В момент полного разряда конденсатора ток достигает максимума (рис. 4.5б) и затем начинает уменьшаться. Это приводит к смене знака ЭДС, и она поддерживает уменьшающийся ток, пока весь положительный заряд не окажется на нижней (по рис. 4.5) обкладке конденсатора. Затем процесс повторяется, но в обрат-

ном направлении. В момент времени, когда конденсатор полностью разрядился, электрическое поле отсутствует, и ранее запасённая в конденсаторе энергия перешла в энергию магнитного поля, сосредоточенного в катушке индуктивности. Энергия магнитного поля может быть найдена по формуле (3.70). Если рассматривать идеальный случай, когда нет тепловых потерь в цепи, т.е. её активное сопротивление равно нулю, то она, естественно, будет равна начальной энергии конденсатора:

$$\frac{q_0^2}{2C} = \frac{Li_m^2}{2}, \quad (4.18)$$

где через i_m обозначен максимальный ток в контуре, в момент, когда конденсатор полностью разряжен.

Поскольку как заряд, так и ток меняются периодически с одной и той же циклической частотой ω , можно записать закон изменения заряда в виде любой периодической функции, и по нему найти закон изменения тока:

$$q = q_0 \cos \omega t; \quad i = \frac{dq}{dt} = -i_m \sin \omega t, \quad (4.19)$$

где $i_m = q_0 \omega$ — максимальное значение силы тока в контуре.

Подставив значение i_m и q_0 в (4.18), найдём хорошо известное выражение, позволяющее вычислить период колебаний, возникающих в контуре, по индуктивности и ёмкости.

Описываемый колебательный контур называют закрытым, поскольку электрические и магнитные поля в нём разделены и локализованы каждое в своей области пространства. Переход электрического поля в магнитное в закрытом контуре происходит, но электромагнитное поле практически не возникает.

В восьмидесятых годах девятнадцатого столетия Прусская Академия наук объявила конкурс экспериментальных работ, целью которых было бы подтверждение Максвелловских гипотез о существовании электромагнитного поля, электромагнитной волны и, наконец, подтверждение предположения о том, что свет есть электромагнитная волна. [Генрих Герц](#) принял участие в этом конкурсе. Для получения электромагнитного поля он использовал колебательный контур, развернув пластины его конденсатора так, чтобы электрическое поле получило возможность распространяться (рис. 4.6), не было бы сосредоточено только между пластинами.

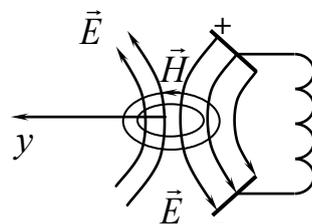


Рис. 4.6

Чтобы возникающее магнитное поле, а вслед за ним и электрическое, были достаточно велики для того, чтобы их можно было зарегистрировать, Герц выполнил пластины конденсатора так, чтобы между ними могла проскакивать искра. Возникающий в контуре разряд, помимо большой частоты колебаний, необходимой для увеличения напряженностей полей (4.10), увеличивал еще и разность потенциалов на пластинах, поскольку разряд может происходить лишь при достижении пробивного напряжения. На определенном расстоянии от опи-

санного выше контура находился точно такой же контур. Но если к первому подводилось напряжение для его зарядки, то второй мог получать энергию лишь от первого, если электромагнитная волна пройдет разделяющее их расстояние и донесет энергию до второго контура. В 1888 году Герц зарегистрировал появление искры во втором контуре (резонаторе) в момент разряда в первом (вибраторе). Несмотря на всё несовершенство экспериментальной техники тех времен, Герцу удалось измерить скорость распространения сигнала, принятого резонатором, и она оказалась равной скорости света. Длина полученной электромагнитной волны оказалась очень большой по сравнению со световой — порядка одного метра. Законы же распространения волны (преломление на границе двух сред, отражение) полностью эквивалентны тем, что имеют место для света. Электромагнитная волна преломляется диэлектриком, как это и следует из (4.17), и отражается металлом, т.е. электрические свойства среды определяют её поведение.

Герц практически полностью справился с задачей, поставленной Академией. Оставлял сомнения факт резкой разницы длин волн: световой и электромагнитной. Лишь в том случае, когда длины эти совпадут, можно будет считать окончательно доказанной последнюю гипотезу об электромагнитной природе света. Подойти к решению этой задачи пытался П. Лебедев, но ему удалось получить лишь сантиметровые волны. Только в 1924 году в Ташкенте, куда, спасаясь от голода уехали многие ученые, Глаголева-Аркадьева получила электромагнитные волны с длиной волны, равной длине волны инфракрасных лучей, окончательно доказав положение, что свет есть электромагнитная волна.

Стоит заметить, что к тому времени уже накопилось достаточно фактов, свидетельствовавших о том, что только волновое представление о свете далеко неполно. В 1905 году А. Эйнштейн за обобщение этих фактов получил Нобелевскую премию, а молодой французский физик де Бройль высказал гипотезу о том, что взгляды, сформулированные Эйнштейном для света, приложимы и к частицам. И, к моменту подтверждения Максвелловских гипотез, физика перешла к созданию своего нового, неклассического раздела — квантовой механики.

Очень интересно, что Г. Герц, публикуя свою работу, высказал глубокое убеждение в том, что зарегистрированные в его опытах волны *никогда не будут иметь практического приложения*. Спустя всего лишь год после того, как было высказано это утверждение, в Петербурге [А.С. Попов](#) использовал электромагнитные волны для передачи сигналов без проводов. Первые слова, переданные им по радио, были: «Генрих Герц».

Электромагнитные волны теперь хорошо изучены. Их длина волны λ и, следовательно, частота

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (4.20)$$

меняются в очень широком диапазоне и определяют физические свойства волны и характер её воздействия на вещество.

Все известные длины волн разделены на диапазоны, каждый из которых имеет свое название, которое зависит от способа возбуждения этой волны. Ниже

приведен рисунок, где на шкале всех возможных длин волн выделены эти диапазоны, указаны способы их возбуждения.

Длина волны, м							
$10^5 \dots 10^3$	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	$10^{-9} \dots 10^{-10}$	$10^{-11} \dots 10^{-15}$
радиоволны		инфракрасные		видимые	ультрафиолет	рентген	γ -лучи
←→		←→		←→	←→	←→	←→
переменные токи		атомные процессы					ядерные реакции

Рис. 4.7

Коротко коснёмся радиоволн. Самые длинные из них испускаются небесными телами, улавливаются радиотелескопами. Излучение объясняется тем, что любое небесное тело заряжено. Поскольку оно движется по замкнутой эллиптической траектории, т.е. имеет ускорение, то, как и любой ускоренно движущийся заряд, создаёт электромагнитное поле. Из-за очень большого периода движения (малой частоты) создаваемое небесными телами электромагнитное излучение имеет большие — многокилометровые длины волн. Эти радиоволны улавливаются радиотелескопами. Существует целый раздел астрономии — радиоастрономия, все выводы которой основаны на изучении особенностей излучения отдельных объектов Вселенной.

Использование радиоволн в целях связи, радио, телевидения, радиолокации общеизвестно. Современные мобильные телефоны также используют радиоволны. Для каждого типа связи определён свой интервал длин волн.

Следующие диапазоны в представленной *шкале электромагнитных волн* мы пока обсуждать не будем. Особенности каждого из них будут подробно рассмотрены в 3 части "Курса лекций".

Вопросы для самоконтроля

1. Что является источником магнитного поля? На что оно действует? Объясните опыт, демонстрирующий взаимодействие параллельных проводников с током.
2. Как объясняет магнитное взаимодействие теория относительности? Получите выражение для силы взаимодействия двух точечных зарядов, движущихся с одинаковой скоростью относительно наблюдателя.
3. Что является силовой характеристикой магнитного поля? От чего она зависит в случае точечного заряда? Как связаны индукция и напряжённость магнитного поля?
4. Как определяются направление и форма силовых линий магнитного поля? Чем они отличаются от линий напряжённости электрического поля?
5. Получите выражения закона Био — Савара в векторной и скалярной формах для B и H .
6. Расчёт напряжённости магнитного поля прямого и кругового, а также нескольких токов.
7. Сила Лоренца, её свойства. Движение зарядов в магнитном поле. Примеры.
8. Чем отличается магнитное поле от электрического?
9. Закон полного тока. Вычисление напряжённости поля тороида и соленоида.
10. Сила Ампера. Контур в магнитном поле. Магнитный момент.
11. Магнитный поток. Работа магнитного поля. Примеры.
12. Электромагнитная индукция. Как определяются величина и направление ЭДС индукции? Расчёт ЭДС индукции по силе Лоренца. Примеры.
13. Взаимоиндукция. Принцип работы трансформатора.
14. Самоиндукция. Вихревые токи и экстратоки. Индукционный нагрев. Расчёт индуктивности соленоида.
15. Энергия и плотность энергии магнитного поля. В каких единицах измеряются магнитные величины? Какова их размерность?
16. Электромагнитное поле. Гипотезы и уравнения Максвелла. Ток смещения и вихревое электрическое поле.
17. Электромагнитные волны, их свойства и источники. Колебательный контур. Шкала электромагнитных волн.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Андре Мари Ампер. Работал в начале девятнадцатого столетия. Французский физик, математик и химик. Положил начало электромагнетизму. Создал теорию магнетизма, по которой магнитные поля постоянных магнитов объясняются существованием молекулярных токов, что не противоречит современной физике. Ввел понятие направления тока, существующее и поныне. Изобрел электромагнитный телеграф.

Жан Батист Био. Французский физик начала девятнадцатого века. Экспериментатор в области оптики и электромагнетизма. Автор очень известного в своё время курса физики.

Вильгельм Эдуард Вебер. Немецкий физик девятнадцатого столетия. Построил первый в Германии электромагнитный телеграф. Показал, что сила тока определяется скоростью движения зарядов и их концентрацией.

Алессандро Вольта. Итальянский физик конца восемнадцатого—начала девятнадцатого столетий. Сконструировал первый источник электрического тока. Открыл появление разности потенциалов при соединении двух металлов — контактную разность потенциалов.

Джозеф Генри. Американский физик девятнадцатого века. Независимо от Фарадея открыл явление электромагнитной индукции, обнаружил явление самоиндукции, установил причины, влияющие на индуктивность. Построил телеграф.

Герих Рудольф Герц. Немецкий физик конца девятнадцатого столетия. Пользуясь изобретенными им вибратором и резонатором, в 1888 г. доказал существование электромагнитных волн, изучил законы их распространения. Придал Максвелловским уравнениям форму, подчеркивающую взаимосвязь электрических и магнитных явлений. Открыл внешний фотоэффект.

Хендрик Антон Лоренц. Нидерландский физик конца девятнадцатого—начала двадцатого веков. Работал во многих областях теоретической физики. Лауреат Нобелевской премии 1902 г. за предсказание расщепления спектральных линий в сильном магнитном поле. Его работы подготовили переход к квантовой механике и теории относительности. Дал выражение силы, действующей на заряд, движущийся в магнитном поле. Оказал существенное влияние на молодое поколение физиков, был организатором и председателем знаменитых Сольвеевских физических конгрессов, где физики всего мира собирались для обсуждения новых открытий в эпоху бурного развития этой науки.

Джеймс Клерк Максвелл. Английский физик середины девятнадцатого столетия. Под его руководством в Кембриджском университете создана знаменитая Кавендишская лаборатория, которую он возглавлял до конца жизни. Первый профессор экспериментальной физики. Работал в области молекулярной физики и электродинамики. Ввел понятие тока смещения (1861 г.), электромагнитного поля (1864 г.), электромагнитной волны (1865 г.), высказал гипотезу об электромагнитной природе света (1865 г.). Работал в области упругости и теплофизики. Сконструировал ряд физических приборов.

Александр Степанович Попов. Русский физик и электротехник. В 1888 г. повторил опыт Герца, в 1889 г. высказал мысль о возможности их использования для средств связи, в 1895 г. продемонстрировал свой радиоприёмник, в 1896 г. передал первую в мире радиограмму «Генрих Герц». В 1897 г. обнаружил явление отражения радиоволн от металлов, что послужило основой радиолокации.

Феликс Савар. Французский физик начала девятнадцатого века. Работы в основном относятся к области акустики, где он установил верхний предел слышимости.

Никола Тесла. Сербский ученый конца девятнадцатого и начала двадцатого века. Работал в области электротехники и радиотехники. Разработал ряд электрогенераторов и электродвигателей, трансформаторов. Исследовал возможность беспроводной передачи сигналов на значительные расстояния, построил мощную для того времени радиостанцию (1899 г.). Изобрел электрический счетчик.

Майкл Фарадей. Английский физик начала девятнадцатого века. Учился самостоятельно. Экспериментатор в области электричества, магнетизма, электрохимии, магнитооптики. Создал первую модель электродвигателя. Изучил электролиз и установил его законы. Ввел понятия: подвижность носителей, катод, анод, ионы, электролиз, электроды. Изобрел вольтметр. Открыл, что магнитные свойства у разных веществ разные. Обнаружил влияние магнитного поля на свет (вращение плоскости поляризации). Открыл явление электромагнитной индукции. Впервые ввел понятия *поля*, силовых линий, различных для электрических и магнитных полей. Доказал закон сохранения заряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977.
2. Тамм И.Е. Основы теории электричества. — М.: Гостехиздат, 1956.
3. Парселл Э. Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1971.
4. Физический энциклопедический словарь. — М.: Сов. энциклопедия, 1984.
5. Фриш С.Э., Тиморева А.В. Курс общей физики. — М.: Наука, 1970. — Т2..
6. Соколова Н.М., Биглер В.И. Физика: Курс лекций. — Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2000. — Ч.1.