

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Филиал в г. Златоусте
Кафедра физики

53(07)
С595

Н.М. Соколова, В.И. Биглер

Ф И З И К А

Курс лекций

Часть 1

Издание второе, переработанное и дополненное

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2006

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Курс лекций предназначен для инженерно-технических специальностей вузов, учебные планы которых предусматривают изучение физики в течение трёх семестров с общим объёмом около 600 часов, из которых не менее 40% приходится на аудиторные занятия. В первую часть курса включены основы классической механики, молекулярная физика и термодинамика.

Во втором издании уточнены некоторые понятия и исправлены допущенные в первом издании опечатки.

Опущен раздел «Основы специальной теории относительности», изложение которого перенесено во 2-ю часть «Курса лекций», изданную в 2005 году.

В главе «Молекулярная физика», наряду с газообразным состоянием вещества рассмотрены свойства жидкостей и твёрдых тел, а также отличия в структуре кристаллических и аморфных веществ.

Добавлена глава «Термодинамика», в которой вводятся основные термодинамические функции, подробно рассматривается физическое содержание понятия энтропии, как приведённой теплоты и как меры беспорядка в термодинамической системе.

В раздел «Колебания и волны» добавлен пример о колебаниях физического маятника и элементы акустики.

Увеличено количество рисунков и примеров для закрепления пройденного материала.

Ограниченный объём не позволяет с достаточной полнотой изложить весь материал, рекомендуемый к изучению программой по общей физике, поэтому в конце пособия приведены экзаменационные вопросы и список рекомендуемой учебной литературы.

Авторы выражают признательность заведующей учебными лабораториями кафедры Л.В. Биглер, взявшей на себя труд по набору и техническому оформлению рукописи.

Система обозначений

Векторы помечены стрелкой над буквой, обозначающей векторную величину (например, $\vec{a}$, $\vec{F}$); та же буква без стрелки (a , F) означает модуль вектора.

Средние величины отмечены угловыми скобками $\langle \rangle$, например, $\langle v \rangle$, $\langle \lambda \rangle$.

Символы Δ , d , δ перед величинами означают:

Δ — конечное приращение величины, то есть разность её конечного и начального значений, например $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\Delta V = V_2 - V_1$;

d — бесконечно малое приращение (дифференциал), например $d\vec{r}$, dS ;

δ — элементарное значение величины, например δA — элементарная работа.

Единичные векторы:

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты декартовых координат x , y , z .

$\vec{n}$, $\vec{\tau}$ — орты нормали и касательной к траектории.

A — работа;
 $\vec{a}$ — ускорение;
 c — скорость звука, скорость света в вакууме;
 $C^{\text{м}}$ — молярная теплоёмкость;
 c_v, c_p — удельная теплоёмкость при постоянном объёме, при постоянном давлении;
 D — коэффициент диффузии;
 d_0 — диаметр молекулы;
 E, W — полная энергия;
 e_k, e_p — кинетическая, потенциальная энергия молекулы;
 $\vec{F}$ — сила;
 $\vec{F}dt$ — импульс силы;
 g — ускорение свободного падения;
 h — высота;
 H — энтальпия;
 I — момент инерции;
 k — коэффициент упругой силы, постоянная Больцмана;
 $\vec{L}$ — момент импульса;
 l — плечо силы, длина, линейная координата;
 $\vec{M}$ — момент силы;
 m — масса; m_0 — масса молекулы;
 $\vec{N}$ — сила реакции опоры;
 N_A — число Авогадро;
 n — частота вращения;
 P — мощность;
 $\vec{p}$ — импульс тела;
 p — нормальное давление;

$Q, \Delta Q$ — количество теплоты;
 $\vec{r}$ — радиус-вектор;
 $\Delta\vec{r}$ — перемещение;
 T — период, абсолютная температура;
 r — коэффициент сопротивления;
 s — путь, длина дуги, криволинейная координата;
 S — площадь, энтропия;
 U — внутренняя энергия;
 V — объём;
 W_k, W_p — энергия кинетическая, потенциальная;
 w_T — термодинамическая вероятность;
 β — коэффициент затухания;
 γ — гравитационная постоянная;
 ε — угловое ускорение;
 η — коэффициент динамической вязкости;
 φ — угол поворота; фаза колебаний;
 κ — логарифмический декремент, коэффициент теплопроводности;
 λ — длина волны, длина свободного пробега;
 μ — коэффициент трения, молярная масса;
 ν — частота колебаний;
 ρ — плотность;
 v — линейная скорость;
 ω — угловая скорость, угловая частота;

I. ВВЕДЕНИЕ

Физика — одна из основных естественных наук, изучающих законы природы. Её курс делится обычно на несколько разделов, в каждом из которых изучаются различные виды материи и её движения. Вначале обычно рассматривают механическое движение макроскопических тел, как наиболее наглядное и доступное для понимания. Законы этого движения описаны в первом разделе физики — в *механике*. Механику, в свою очередь, делят на кинематику, динамику, статику.

В *кинematике* движение описывается чисто внешне, без анализа причин, вызывающих его изменение. Основными понятиями кинематики являются перемещение, скорость и ускорение, то есть такие величины, которые помимо абсолютного значения имеют ещё и направление. Поэтому, прежде чем перейти к изложению кинематики, повторим элементы векторной алгебры.

1.1. Понятие о векторах и простейших действиях над ними

Вектором называют любую физическую величину, имеющую не только числовое значение, но и направление. Двойная смысловая нагрузка вектора хорошо видна при такой записи векторной величины $\vec{a}$:

$$\vec{a} = a\hat{a}, \quad (1.1)$$

где число a характеризует абсолютное значение вектора $\vec{a}$, а множитель $\hat{a}$ — его направление. Вектор $\hat{a}$ называют *единичным вектором*, поскольку величина его равна единице.

Геометрически векторная величина изображается стрелкой, опять-таки несущей двойную смысловую нагрузку: длина стрелки определяет абсолютное значение векторной величины, а направление указывается стрелкой. Условимся обозначать любую векторную величину соответствующей буквой со стрелкой над ней, а модуль вектора — той же буквой, но *без стрелки*. Так, например, $\vec{v}$ — это *вектор* скорости, а v — *модуль* скорости, то есть всегда величина положительная.

Действия над векторами введены для математического описания наблюдаемых явлений. Так, на рис. 1.1 изображена задача, в которой из точки A в точку C можно пройти разными способами, например, прямо (вектор $\vec{c}$) и через точку B (рис.1.1а). При прохождении через точку B результат будет такой же, поэтому вектор $\vec{c}$ равен сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}. \quad (1.2)$$



Рис. 1.1

Длину вектора $\vec{c}$, то есть абсолютное значение отрезка AC можно найти, если известны длины отрезков AB и BC , то есть зная a и b (модули соответствующих векторов). Задача нахождения c требует, вообще говоря, нового чертежа (см. рис. 1.1б), где даны только длины отрезков. По теореме косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha, \quad (1.3)$$

где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Углом между двумя векторами называют угол, образованный этими векторами, проведенными из одной точки. На рис. 1.1а показан не угол между векторами, а равный ему. Если пользоваться правилом параллелограмма, то на чертеже можно указать непосредственно угол между векторами соответственно его определению (см. рис. 1.1б). В теореме косинусов (1.3) знак плюс появляется потому, что сторона c лежит против угла $(180^\circ - \alpha)$.

Операция сложения векторов, как видим, требует для её выполнения двух уравнений. Уравнение (1.2) формально задаёт *вектор-сумму*, а уравнение (1.3) даёт возможность вычислить *модуль суммы* двух векторов. Заметим, что само по себе выражение (1.2) не задаёт направление вектора $\vec{c}$, а лишь определяет операцию. Это определение следует дополнить правилом сложения: *сложить два вектора — значит построить второй вектор из конца первого и соединить стрелкой начало первого вектора с концом второго*. Пунктиром на рис. 1.1б показано сложение векторов по правилу параллелограмма.

Этот же рисунок иллюстрирует и вычитание векторов: если результат, то есть путь AC , известен, а пройден путь AB , то осталось пройти путь BC , следовательно

$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}. \quad (1.4)$$

Отсюда вытекает правило вычитания векторов: *соединив начала векторов и замкнув концы в сторону вектора уменьшаемого, получим вектор разности*. Длина его также может быть найдена по теореме косинусов:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha. \quad (1.5)$$

Снова задача нахождения векторной величины $\vec{b}$ распадается на два действия: нахождение направления вектора по (1.4) и его модуля по (1.5).

Здесь уместно заметить, что приращение Δ векторной величины — это вектор разности двух векторов. Так, скорость — векторная величина, и её изменение (приращение) будет тоже векторной величиной:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1. \quad (1.6)$$

Направление приращения скорости найдется по правилу вычитания векторов, и, следовательно, не будет совпадать с направлением ни вектора-уменьшаемого $\vec{v}_2$, ни вектора-вычитаемого $\vec{v}_1$. Длина вектора $\Delta \vec{v}$ записывается с символом модуля — $|\Delta \vec{v}|$. Не следует путать его с изменением длины вектора $\vec{v}$, обозначаемым через Δv . Нетрудно убедиться, что если векторы направлены в одну сторону и длина вектора $\vec{v}_2$ больше длины вектора $\vec{v}_1$, то приращение скорости совпадёт с направлением скоростей. Если же скорость $\vec{v}_2 < \vec{v}_1$, то приращение будет отрицательно, то есть, направлено в сторону, противоположную движению.

Векторы можно перемножать двумя способами: скалярным и векторным.

Скалярное произведение двух векторов есть число, которое равно произведению модулей перемножаемых векторов, умноженному на косинус угла между ними:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha. \quad (1.7)$$

Скалярное умножение векторов — единственный случай действия над векторами, когда не требуется два уравнения: ведь получаемый результат — скаляр!

Результатом векторного умножения векторов будет вектор, направление которого находится по правилу: вектор векторного произведения двух векторов перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы-сомножители. Направление векторного произведения определяется поступательным движением буравчика, если головку вращать от первого сомножителя ко второму (рис. 1.2).

Записывается векторное произведение двумя способами:

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}], \quad \text{либо} \quad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}. \quad (1.8)$$

Одного уравнения (1.7), указывающего операцию, вновь недостаточно: ведь следует указать и величину этого вектора. Она находится по правилу:

$$c = ab \sin \alpha, \quad (1.9)$$

где α — угол между векторами-сомножителями.

В механике приходится иметь дело ещё и с двойным векторным произведением, но это правило будет дано в тексте соответствующей лекции.

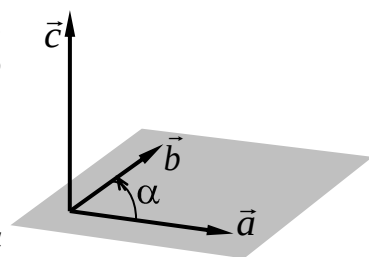


Рис. 1.2

Кроме арифметических операций с векторными величинами часто бывает нужно находить проекции вектора на оси координат, или выражать вектор через его проекции. Рассмотрим двумерный случай, когда вектор $\vec{a}$ лежит в плоскости $ХОУ$ и составляет угол α с осью $ОХ$ (рис. 1.3). Как следует из рисунка, угол между вектором и осью $ОУ$ будет в этом случае равен $(90^\circ + \alpha)$. Проекциями данного вектора на оси координат будут числа a_x и a_y , которые определяются величиной вектора и углом α . В данном случае (см. рис. 1.3)

$$a_x = a \cos \alpha; \quad a_y = -a \sin \alpha. \quad (1.10)$$

Вектор через его проекции можно выразить как сумму векторов, полученных умножением проекций на соответствующие единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$, и определяющие направления осей координат:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}. \quad (1.11)$$

Модуль вектора легко определяется через его проекции по теореме Пифагора:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2. \quad (1.12)$$

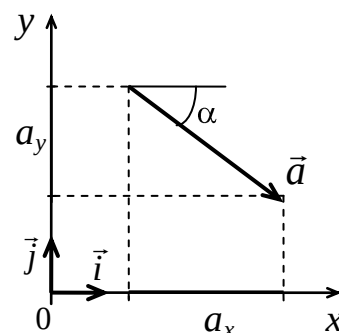


Рис. 1.3

В трёхмерном случае проекций вектора будет три, и в суммах (1.11) и (1.12) добавится проекция a_z с соответствующим единичным вектором $\vec{k}$.

Набор сведений из векторной алгебры, используемых в физике, этим кратким знакомством не заканчивается. Мы продолжим его во второй части.

2. КИНЕМАТИКА

2.1. Кинематические характеристики движения материальной точки

В наиболее простом случае все точки тела движутся одинаково. Такое движение называют *поступательным*. В этом случае есть смысл пренебречь формой и размерами тела и говорить о движении *материальной точки*. Разумеется, такое допущение не может быть принято в тех случаях, когда тело, например, поворачивается, и размеры тела сравнимы с его перемещением.

Исходной характеристикой движения является *перемещение* $\Delta \vec{r}$, то есть вектор, проведённый из точки 1, в которой тело находилось в момент времени t_1 , в точку 2, в которой тело оказалось в момент времени $t_2 = t_1 + \Delta t$ (рис. 2.1). Положение тела на этом рисунке задаётся *радиус-вектором* $\vec{r}$, который при движении точки изменяется, то есть является функцией времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Из рис. 2.1 очевидно, что вектор перемещения равен разности радиус-векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (2.1)$$

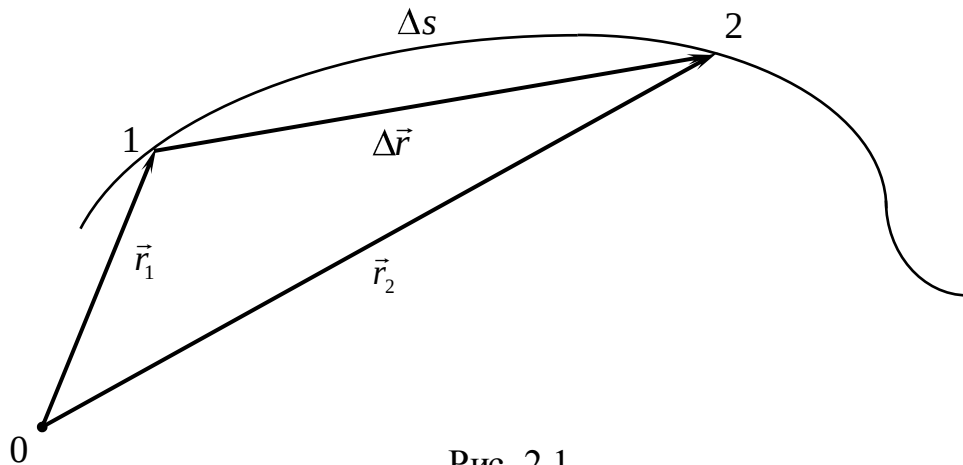


Рис. 2.1

Функцией времени будет также *путь* s , то есть расстояние, пройденное телом по своей *траектории* с момента начала движения. За время Δt тело совершает перемещение $\Delta \vec{r}$ и проходит путь Δs , равный длине дуги между точками 1 и 2 (см. рис. 2.1). Очевидно, что величина перемещения всегда меньше пройденного пути, кроме случая, когда тело движется по прямой в одну сторону:

$$|\Delta \vec{r}| \leq \Delta s. \quad (2.2)$$

(Например, при движении по окружности точка проходит за один оборот путь, равный длине окружности, тогда как перемещение при этом равно нулю). При уменьшении промежутка времени длина дуги (путь) и длина хорды (модуль перемещения) уменьшаются, и разница между ними становится всё меньше. В пределе, при $\Delta t \rightarrow 0$, величина перемещения и путь становятся практически одинаковыми, то есть

$$|d\vec{r}| = ds. \quad (2.3)$$

Положение точки в пространстве можно задавать, как известно, не только радиус-вектором, но и тремя числами — координатами точки. В случае наиболее распространённой — *декартовой* системы координат, координаты x, y, z точки будут равны проекциям вектора $\vec{r}$ на оси координат r_x, r_y, r_z , если радиус-вектор проведён из начала координат. На рис. 2.2. представлен случай, когда точка движется в плоскости и для задания её положения достаточно двух координат: $x = r \cos \alpha$; $y = r \sin \alpha$.

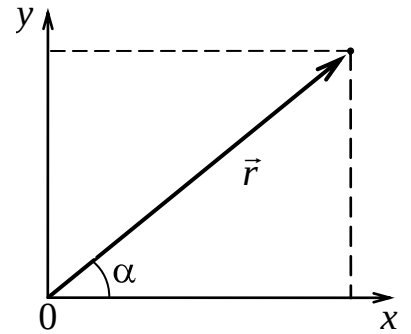


Рис. 2.2

Напомним, что в трёхмерном пространстве радиус-вектор может быть представлен в виде суммы трёх векторов, направленных вдоль соответствующих осей координат. В прямоугольной системе координат

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (2.4)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы, направленные вдоль осей координат. Модуль радиус-вектора, то есть расстояние точки от начала координат, связан с координатами точки соотношением

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2.5)$$

Если точка движется, то её координаты изменяются и являются функциями времени $x(t), y(t), z(t)$.

Уточним направление вектора перемещения. Естественно, когда точка движется по прямой, этот вектор совпадает с направлением движения, с *траекторией* (траекторией называют след, оставленный точкой при её движении). Если же траектория криволинейная (рис. 2.3), единый вектор $\Delta\vec{r}$ указать невозможно, тогда траекторию следует разбить на элементы, столь малые, что каждый элемент можно принять за отрезок прямой.

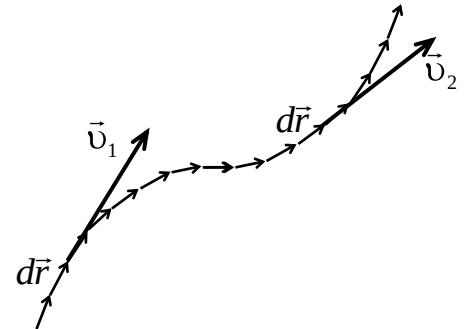


Рис. 2.3

Быстрота движения — *скорость* — будет второй кинематической характеристикой движения. Она может быть определена как отношение бесконечно малого перемещения $d\vec{r}$ к соответствующему промежутку времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{и} \quad v = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}. \quad (2.6)$$

Иначе говоря, *скорость точки есть производная по времени от радиус-вектора $\vec{r}$ этой точки*. Величину скорости, то есть модуль вектора $\vec{v}$, определяют как производную от пути s по времени t . Направление вектора $\vec{v}$ совпадает с направлением $d\vec{r}$, то есть скорость точки направлена по касательной к траектории. Напомним, что для сокращения записей производную по времени обозначают точкой над дифференцируемой функцией, например, вместо ds/dt пишем $\dot{s}$, вместо dx/dt — $\dot{x}$ и так далее.

Так как производная от суммы равна сумме производных, то, дифференцируя радиус-вектор (2.4) по времени, получаем связь между скоростью и её проекциями на оси координат:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}; \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \quad (2.7)$$

где $v_x = \dot{x}$; $v_y = \dot{y}$; $v_z = \dot{z}$ — проекции вектора скорости на оси координат.

В общем случае движения материальной точки её скорость не остаётся неизменной, а непрерывно меняется, причём изменения могут происходить как по величине, так и по направлению. Назовём *ускорением* быстроту изменения вектора скорости, то есть отношение приращения скорости к приращению времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.8)$$

Здесь $d\vec{v}$ — приращение вектора скорости за бесконечно малый промежуток времени dt .

В координатной записи

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}; \quad a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \quad (2.9)$$

где $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$; $a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$; $a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$ — проекции вектора ускорения на оси координат.

Ускорение, определяемое по (2.7), называют *полным ускорением*. Направление полного ускорения совпадает с направлением вектора $d\vec{v}$ — вектора приращения скорости.

В общем случае, когда точка движется по кривой и величина её скорости изменяется, вектор $d\vec{v}$, а, значит, и вектор ускорения, направлены под произвольным углом к траектории (рис. 2.4). На рисунке разность скоростей найдена переносом вектора $\vec{v}_1 = \vec{v}$ в начало вектора $\vec{v}_2 = (\vec{v} + d\vec{v})$. Угол наклона $d\vec{v}$ к траектории меняется в зависимости от того, насколько вектор $\vec{v}_2$ длиннее или короче, чем вектор $\vec{v}_1$.

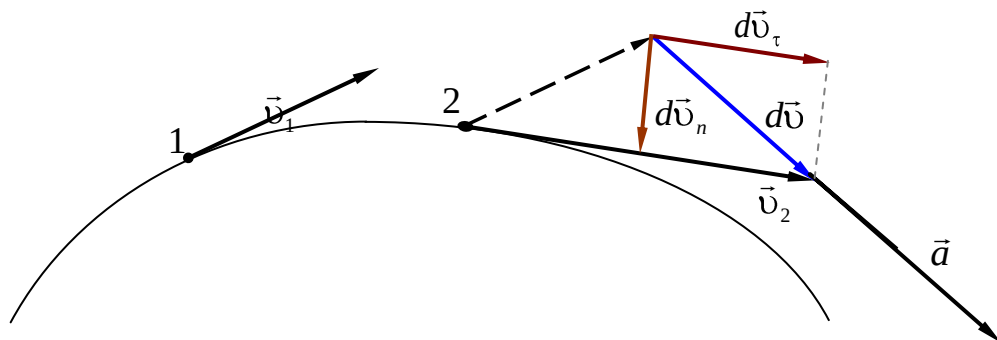


Рис. 2.4

Предположим, что движение точки происходит без изменения длины вектора скорости, то есть точка движется с постоянной (по величине!) скоростью. Тогда

для нахождения вектора приращения скорости в точке 2 следует отложить вектор той же длины, что и в точке 1. Вновь соединив концы векторов, получим вектор изменения скорости. Он не равен нулю, несмотря на неизменность величины скорости, менялось только её направление. Следовательно, вектор $d\vec{v}_n$ (см. рис. 2.4) характеризует именно это изменение. Этот вектор отличается от полученного выше приращения $d\vec{v}$ и по величине и по направлению, и ему присвоен индекс n , поскольку при бесконечно малых изменениях вектор $d\vec{v}_n$ практически перпендикулярен вектору скорости. Поделив это нормальное (то есть, перпендикулярное скорости) приращение скорости на приращение времени, получим ускорение, которое назовём *нормальным*:

$$\vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_n}{dt}. \quad (2.10)$$

Нормальное ускорение будет иметь место только при изменении *направления* скорости.

Теперь рассмотрим ту составляющую вектора $d\vec{v}$, которая параллельна скорости — вектор $d\vec{v}_\tau$ (см. рис. 2.4), длина которого $|d\vec{v}_\tau| = |(\vec{v} + d\vec{v}) - \vec{v}| = d\upsilon$ равна разности длин векторов второй и первой скорости. Очевидно, что эта часть полного приращения скорости характеризует изменение *величины* скорости, которое произошло за время перемещения точки из 1 в 2. Присвоим ему индекс τ и, поделив на приращение времени, получим *тангенциальное ускорение*

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt}. \quad (2.11)$$

Очевидно, что тангенциальное ускорение характеризует *быстроту изменения модуля скорости* (длины вектора $\vec{v}$), следовательно, величина вектора $\vec{a}_\tau$, а точнее, его проекция на направление скорости, определяется как производная от модуля скорости по времени:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}. \quad (2.12)$$

Последнее уравнение показывает, что a_τ может иметь знак: оно будет положительным, если скорость увеличивается, и отрицательным, если скорость уменьшается, так как в этом случае $d\upsilon$ — приращение модуля скорости — отрицательно. Движение с убывающей скоростью называется *замедленным*. Очевидно, что при замедленном движении вектор тангенциального ускорения направлен противоположно вектору скорости.

Судя по рис. 2.4, вектор приращения скорости равен сумме приращений, характеризующих изменение скорости по величине и по направлению: $d\vec{v} = d\vec{v}_n + d\vec{v}_\tau$. Очевидно, векторы ускорений соотносятся так же:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \quad (2.13)$$

2.2. Нормальное ускорение. Его направление и модуль. Модуль полного ускорения

Найдём величину нормального ускорения, рассмотрев равномерное движение точки по окружности. В этом случае тангенциальное ускорение равно нулю, и полное ускорение точки равно нормальному ускорению:

$$|\vec{a}_n| = a = \frac{|d\vec{v}|}{dt}. \quad (2.14)$$

Пусть точка движется по окружности радиусом R с постоянной по величине скоростью v (рис. 2.5). В этом случае длины векторов скорости остаются неизменными, меняется только их направление, и угол между векторами $\vec{v}$ и $d\vec{v}$ также не изменяется и составляет практически 90° (см. рис. 2.5а).

Если последовательно изобразить векторы скорости во всех точках окружности (на рис. 2.5б они изображены в четырёх точках), а затем перенести их начала в точку A , то получим вторую окружность, составленную векторами $d\vec{v}$.

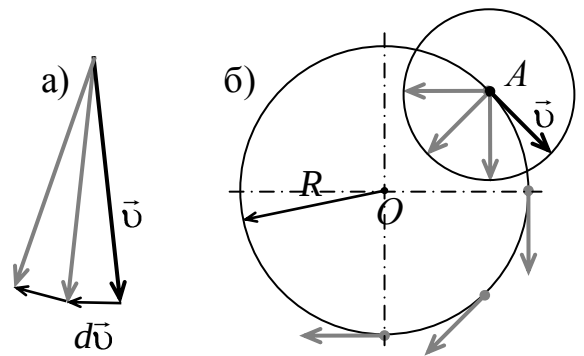


Рис. 2.5

Радиусом окружности будет модуль v вектора скорости. Длина этой новой окружности будет равна $2\pi v$, она составлена из отдельных векторов $d\vec{v}$ и равна модулю изменения вектора скорости $|\Delta\vec{v}|$ за

время одного оборота, которое легко найти, поделив путь, пройденный точкой и равный длине окружности, на величину скорости:

$$\Delta t = \frac{2\pi R}{v}. \quad (2.15)$$

Если, следуя выражению (2.14), разделить величину изменения вектора скорости $|\Delta\vec{v}| = 2\pi v$ на то время (2.15), за которое оно произошло, получим модуль нормального ускорения:

$$a_n = \frac{2\pi v}{(2\pi R/v)} = \frac{v^2}{R}. \quad (2.16)$$

Направление же нормального ускорения совпадает с вектором $d\vec{v}_n$, а последний вектор всегда перпендикулярен скорости, так как является элементом окружности, в которой скорость является радиусом (см. рис. 2.5).

Скорость всегда направлена по касательной к траектории, значит нормальное ускорение направлено по радиусу к центру её кривизны. Поэтому в случае движения по окружности с постоянной скоростью нормальное ускорение называют *центростремительным*.

Итак, определив третью кинематическую характеристику движения материальной точки — полное ускорение по (2.9) — мы пришли к выводу, что его мож-

но представить в виде суммы двух ускорений — тангенциального и нормального, модули которых находятся по (2.12) и (2.16) соответственно.

На рис. 2.6 изображены векторы этих ускорений в двух точках криволинейной траектории. В точке 1 тело движется замедленно, в точке 2 — ускоренно. Но в любом случае ускорения $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ перпендикулярны друг другу. Согласно (2.13) их геометрическая сумма должна дать полное ускорение, которое, как и на рис. 2.4, направлено под углом к траектории внутрь её кривизны. Модуль полного ускорения легко найти по теореме Пифагора:

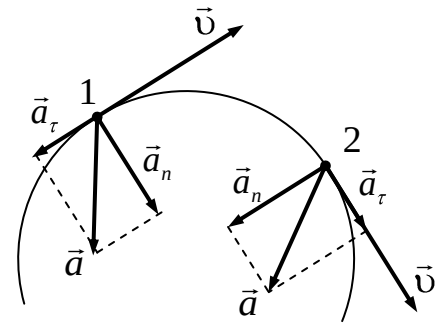


Рис. 2.6

$$a^2 = a_n^2 + a_\tau^2. \quad (2.17)$$

При неравномерном движении по кривой все три ускорения не равны нулю. При *равномерном* движении по любой траектории $a_\tau = 0$, а при любом движении по *прямой* нормальное ускорение $a_n = 0$.

2.3. Кинематические уравнения движения материальной точки

Описывая движение материальной точки, мы классифицируем его по виду траектории: *прямолинейное* или *криволинейное*, и по характеру движения: *равномерное* или *неравномерное*. От типа траектории зависит *нормальное ускорение*. При прямолинейном движении $a_n = 0$, в иных случаях нормальное ускорение при одинаковой скорости будет больше в тех точках траектории, где меньше радиус её кривизны (см. формулу 2.16).

Тангенциальное ускорение при движении по любой траектории говорит о характере изменения *величины* скорости. Скорость может увеличиваться либо уменьшаться, или оставаться постоянной во всё время движения. В частности, изменение скорости может быть равномерным — то есть за равные промежутки времени изменения скорости будут одинаковыми. По этим признакам принято различать такие типы движения: *равномерное* (при постоянной скорости: $v = \text{const}$, $a_\tau = 0$), *равнопеременное* (при постоянном тангенциальном ускорении: $a_\tau = \text{const}$) и *не равнопеременное* (когда тангенциальное ускорение меняется). Для двух первых видов движения нетрудно найти уравнения, позволяющие рассчитать характеристики движения в любой момент времени.

Поскольку характеристик всего три: путь, скорость и ускорение, то уравнений будет немного. Вопрос о нахождении вида уравнений движения можно решить как графическим, более наглядным способом, так и аналитическим. Рассмотрим их последовательно сначала на примере простейшего вида движения — *равномерного*.

1. В случае *равномерного движения* графиком зависимости величины скорости от времени будет прямая линия, параллельная оси времени (рис. 2.7). Из этого графика нетрудно найти и пройденный за определенное время t путь.

Действительно, из определения величины скорости (2.6) следует, что элементарный путь

$$ds = v dt, \quad (2.18)$$

то есть на графике величина ds будет равна площади выделенной полоски шириной dt .

Весь пройденный за конечное время t путь s равен сумме элементарных путей, а на графике (рис. 2.7) — площади прямоугольника со сторонами v и t :

$$s = vt. \quad (2.19)$$

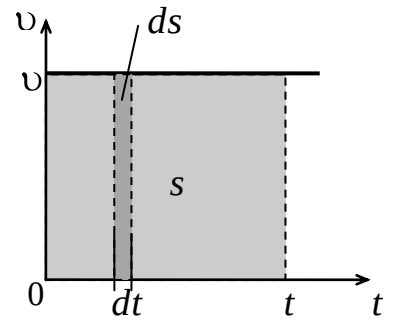


Рис. 2.7

В рассматриваемом случае одна из трёх кинематических характеристик равна нулю (тангенциальное ускорение), вторая постоянна (скорость), поэтому полученное выше уравнение будет единственным. Это уравнение можно получить аналитически, интегрируя уравнение (2.18) в соответствующих пределах:

$$\int_0^s ds = \int_0^t v dt, \quad (2.20)$$

что для случая постоянной скорости приведёт к полученному выше результату. Это вполне естественно, так как площадь, ограниченная графиком любой функции и осью, на которой отложена независимая переменная (в нашем случае t) имеет геометрический образ интеграла этой функции.

2. Для случая *равнопеременного движения* следует рассмотреть два графика, соответствующих ускоренному ($a_\tau > 0$) и замедленному ($a_\tau < 0$) движениям. Первый из них представлен на рис. 2.8а, где с течением времени скорость возрастает.

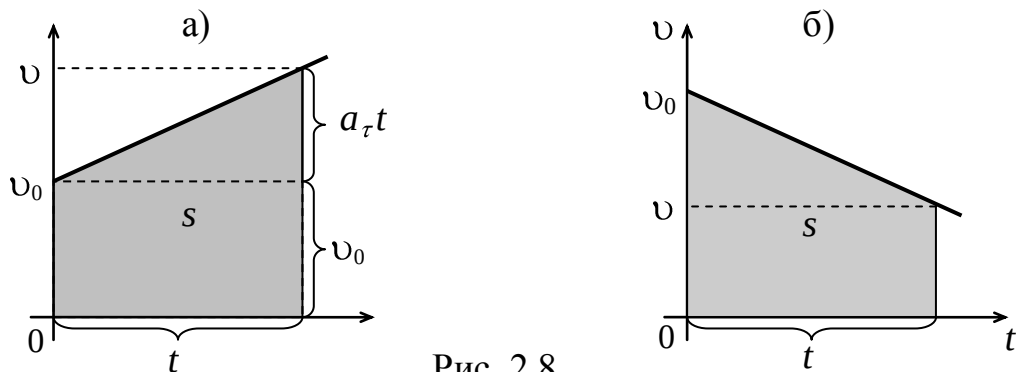


Рис. 2.8

Поскольку ускорение a_τ есть первая производная от скорости по времени, постоянство тангенциального ускорения означает, что за равные промежутки времени изменения скорости одинаковы. Постоянным остаётся и угловой коэффициент $\frac{dv}{dt} = a_\tau$, значит, график будет прямой линией.

Замедленное движение обязательно имеет начальную скорость, которая с течением времени убывает (см. рис. 2.8б). Угол наклона прямой к оси t теперь тупой, что соответствует отрицательному угловому коэффициенту ($a_\tau < 0$).

Очевидно, что зависимость скорости от времени может быть получена интегрированием уравнения (2.14), определяющего тангенциальное ускорение. В рас-

смаатриваемом случае равнопеременного движения оно постоянно, поэтому в результате интегрирования получим:

$$dv = a_\tau dt; \Rightarrow \int_0^s dv = \int_0^t a_\tau dt = a_\tau \int_0^t dt; \Rightarrow v = v_0 + a_\tau t. \quad (2.21)$$

Теперь перейдём к выводу уравнения для нахождения второй, зависящей от времени, характеристики движения — пройденного пути s . Для этого проинтегрируем уравнение (2.18) с учётом полученной выше зависимости скорости равнопеременного движения от времени (2.21):

$$ds = v dt; \Rightarrow \int_0^s ds = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + a_\tau t) dt; \Rightarrow s = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (2.22)$$

Приведём всё в систему и покажем, что набор уравнений и понятий, которыми располагает кинематика материальной точки, не так обширен, как это может показаться на первый взгляд. Действительно, если оставить в стороне вопрос о траектории, и, следовательно, о направлении скорости, то остаётся только три характеристики движения: пройденный путь s , величина скорости v и тангенциальное ускорение a_τ .

Если положить ускорение равным нулю (то есть скорость постоянной), то с течением времени будет меняться только путь:

$$s = v t. \quad (2.23)$$

При равнопеременном движении появляется второе уравнение, дающее возможность вычислить скорость в любой момент времени. Тогда уравнения зависимостей $v(t)$ и $s(t)$ можно записать в виде:

$$v = v_0 + a_\tau t; \quad s = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (2.24)$$

Часто приходится решать и обратную задачу: нахождение скорости и ускорения по заданному закону движения $s(t)$. Такая задача решается дифференцированием пути по времени. Скорость находится как первая производная от пути по времени, а ускорение — как вторая производная:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}. \quad (2.25)$$

Если точка движется по кривой известного радиуса R , то полное ускорение точки находится по теореме Пифагора:

$$a^2 = a_n^2 + a_\tau^2, \quad (2.26)$$

где нормальное ускорение определяется по формуле (2.16) ($a_n = v^2/R$), а тангенциальное — по формуле (2.25).

И, наконец, последнее. Уравнения для равнопеременного движения имеют два частных случая: когда начальная либо конечная скорости равны нулю. Уравнения скорости в этих случаях будут одночленами:

$$v = a_\tau t \quad \text{и} \quad v_0 = - a_\tau t. \quad (2.27)$$

Уравнение пути одинаково для обоих частных случаев, если тангенциальное ускорение взять по модулю:

$$s = \frac{|a_\tau| t^2}{2}. \quad (2.28)$$

Поскольку одночленными уравнениями легче пользоваться, не следует ими пренебрегать, решая конкретные задачи. Одну из них мы рассмотрим ниже.

2.4. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Это движение имеет очень важную особенность: если пренебречь сопротивлением воздуха, то *полное ускорение тела в любой точке траектории будет равно ускорению свободного падения $\vec{g}$* . При малых расстояниях от поверхности Земли (по сравнению с радиусом Земли, который равен приблизительно 6400 км) ускорение свободного падения можно считать не зависящим от высоты, на которой находится тело, то есть величина и направление полного ускорения в процессе такого движения не изменяются. Тангенциальное и нормальное ускорения изменяются, но их векторная сумма в любой точке траектории постоянна и равна ускорению свободного падения:

$$\vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \vec{g}; \quad a_\tau^2 + a_n^2 = g^2. \quad (2.29)$$

Рассмотрим движение тела, брошенного с начальной скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту из точки с координатами x_0, y_0 . Начало координат выберем на поверхности Земли, ось x горизонтальна, ось y направим вертикально вверх. Координату z не рассматриваем, полагая, что движение происходит в вертикальной плоскости, в которой лежат оси координат, векторы начальной скорости и ускорения. Траектория тела (ниже мы покажем, что это будет парабола), система координат и соответствующие векторы представлены на рис. 2.9.

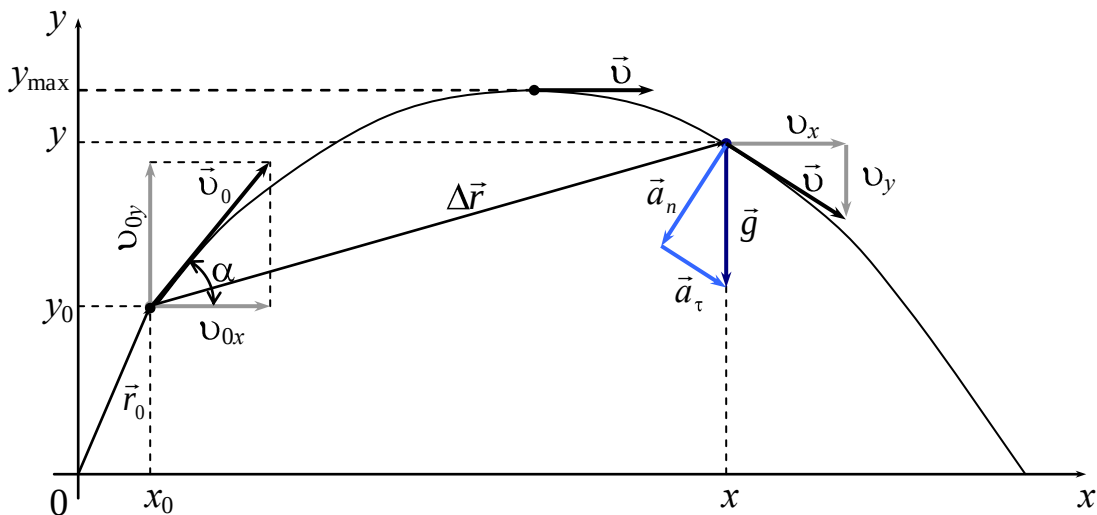


Рис. 2.9

Запишем кинематические уравнения этого движения в векторном виде, учитывая, что в векторной форме это движение с постоянным ускорением $\vec{g}$:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t; \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}. \quad (2.30)$$

Здесь, как мы и показывали выше для равноускоренного движения (см. уравнения 2.24), скорость пропорциональна времени t , а перемещение $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ пропорционально t^2 .

В координатной форме зависимость от времени будет такая же:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + g_x t; & x &= x_0 + v_{0x} t + \frac{g_x t^2}{2}; \\ v_y &= v_{0y} + g_y t; & y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{g_y t^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Как видно из рис. 2.9, проекции ускорения и начальной скорости на оси координат

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha; \quad g_x = 0; \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha; \quad g_y = -g. \quad (2.32)$$

С учётом этого уравнения (2.31) запишутся в виде

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha; & x &= x_0 + (v_0 \cos \alpha) t; \\ v_y &= v_0 \sin \alpha - g t; & y &= y_0 + (v_0 \sin \alpha) t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

По этим уравнениям легко найти координаты тела и проекции его скорости в любой момент времени, если оно меньше длительности полёта тела.

Величину скорости v в заданный момент времени t и модуль перемещения $|\Delta \vec{r}|$ тела к этому моменту найдём по теореме Пифагора (см. рис. 2.9):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \quad |\Delta \vec{r}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (2.34)$$

где значения x , y , v_x и v_y вычисляются по формулам (2.33).

Также можно найти тангенциальное и нормальное ускорения в момент времени t . Для этого рассмотрим подобные треугольники, составленные из скоростей и ускорений (см. рис. 2.9). Из подобия треугольников следует:

$$\frac{a_n}{g} = \frac{v_x}{v}; \quad \frac{a_\tau}{g} = \frac{v_y}{v}, \quad (2.35)$$

откуда легко выразить соответствующие ускорения. Заметим, что сумма квадратов тангенциального и нормального ускорений должна быть равна квадрату ускорения свободного падения:

$$a_n^2 + a_\tau^2 = g^2. \quad (2.36)$$

Теперь найдём время t_n , за которое тело достигает наивысшей точки траектории. В этой точке вертикальная составляющая скорости равна нулю, и из соответствующего уравнения (2.33) получим

$$t_n = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (2.37)$$

Подставив это время в уравнение для координаты y из (2.33), найдём наибольшую высоту подъёма

$$y_{\max} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (2.38)$$

Аналогично можно найти координату x наивысшей точки траектории.

В заключение получим уравнение траектории — зависимость координаты y от координаты x . Для упрощения преобразований будем считать, что тело брошено из начала координат, то есть $x_0 = y_0 = 0$. Тогда формулы (2.33) для координат станут короче:

$$x = (v_0 \cos \alpha)t; \quad y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}. \quad (2.39)$$

Выразив из первого уравнения время и подставив во второе, получим уравнение параболы

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (2.40)$$

2.5. Кинематические характеристики вращательного движения и их связь с линейными характеристиками

Вращение отличается от поступательного движения тем, что все точки тела описывают вокруг оси вращения концентрические окружности разных радиусов, за исключением точек лежащих на оси вращения (ось OO' на рис. 2.10а).

Рассмотрим вращательное движение произвольно выбранной точки некоторого твёрдого тела (см. рис. 2.10). Очевидно, что путь, пройденный каждой точкой за одно и то же время, будет разным, различной будет и скорость движения. Величиной, которая описывала бы перемещение тела и оставалась бы одинаковой для всех его точек, является угол поворота $d\varphi$. Из геометрии известно, что бесконечно малый угол поворота $d\varphi$ связан с перемещением точки ds по дуге окружности радиусом R соотношением (см. рис. 2.10б):

$$ds = R d\varphi. \quad (2.41)$$

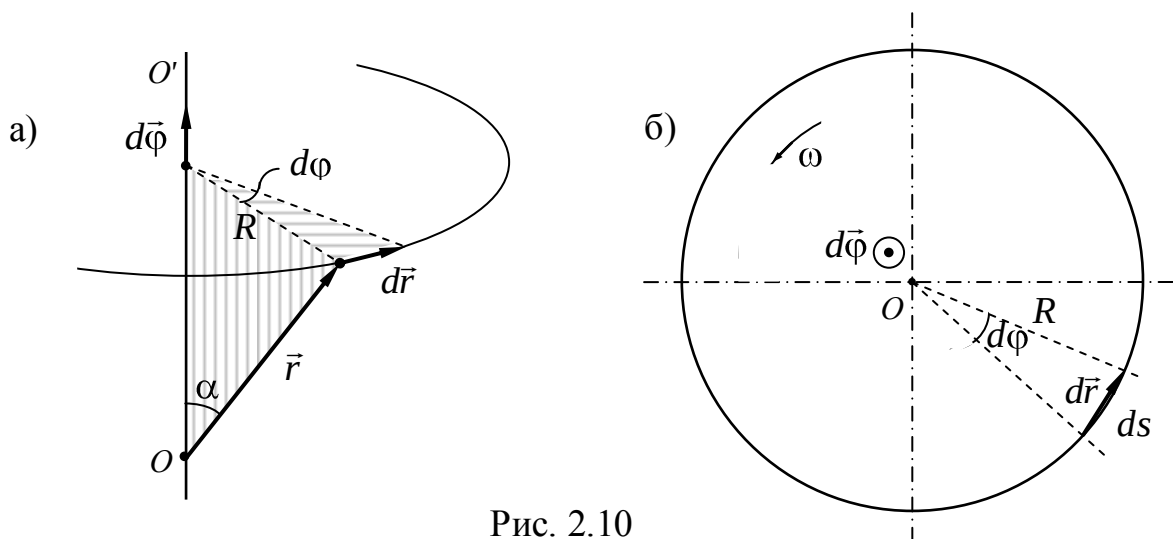


Рис. 2.10

Для характеристики направления вращения *элементарное угловое перемещение* $d\vec{\varphi}$ условились считать вектором. Его направление связывают с направлением вращения правилом буравчика. В нашем случае вектор $d\vec{\varphi}$ направлен вверх, так как при таком направлении вращения винт с правой резьбой ("буравчик") бу-

дет перемещаться вверх — «выкручиваться». Величина вектора $d\vec{\phi}$ равна бесконечно малому углу поворота $d\phi$. Заметим, что конечный угол поворота ϕ (или $\Delta\phi$) не является вектором.

Из точки, лежащей на оси вращения, проведём в выбранную точку тела радиус вектор $\vec{r}$ и вектор $d\vec{r}$ бесконечно малого перемещения этой точки. Так как вектор $d\vec{\phi}$ направлен по оси вращения, то вектор $d\vec{r}$ будет равен векторному произведению векторов $d\vec{\phi}$ и $\vec{r}$:

$$d\vec{r} = d\vec{\phi} \times \vec{r}, \quad (2.42)$$

то есть вектор перемещения направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора $\vec{r}$ и $d\vec{\phi}$ (вертикальная штриховка на рис. 2.10а). Напомним, что изменение порядка написания векторов $\vec{r}$ и $d\vec{\phi}$ изменит знак векторного произведения на противоположный.

Из определения векторного произведения и рис. 2.10 следует, что модуль вектора перемещения (2.42)

$$|d\vec{r}| = d\phi \cdot r \sin \alpha = d\phi R = ds, \quad (2.43)$$

что совпадает с выражением (2.41). Следовательно, при бесконечно малых перемещениях модуль вектора перемещения равен элементу дуги, по которой движется точка.

На рис. 2.10б представлен вид сверху на рис. 2.10а, вдоль оси $O'O$. Вектор $d\vec{\phi}$ на этом рисунке направлен «к нам», что показано кружком с точкой посередине.

Введём вектор *угловой скорости* $\vec{\omega}$, который будет характеризовать как быстроту, так и направление вращения:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}. \quad (2.44)$$

Направление $\vec{\omega}$ совпадает с $d\vec{\phi}$, то есть с осью вращения и определяется по правилу буравчика. Дифференцируя (2.42) по времени, получим связь между угловой скоростью тела и *линейной скоростью* $\vec{v}$ точки тела:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r} \right], \quad (2.45)$$

или

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.46)$$

Раскрывая векторное произведение, получим выражение для модуля линейной скорости:

$$v = \omega \cdot r \sin \alpha = \omega R. \quad (2.47)$$

Определим теперь *угловое ускорение* $\vec{\varepsilon}$ как быстроту изменения угловой скорости во времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (2.48)$$

Вектор $\vec{\varepsilon}$, так же, как и векторы угловой скорости и углового перемещения, направлен по оси вращения. При ускоренном вращении ($d\vec{\omega} > 0$) его направление совпадает с вектором угловой скорости, при замедленном вращении ($d\vec{\omega} < 0$) век-

тор углового ускорения направлен противоположно вектору $\vec{\omega}$. Если направление оси вращения изменяется, то вектор $\vec{\varepsilon}$ не совпадает с осью вращения, но всегда остаётся направленным по вектору $d\vec{\omega}$.

Связь углового ускорения с линейным ускорением получаем, дифференцируя (2.46) по времени:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right] \quad (2.49)$$

или:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (2.50)$$

Таким образом, линейное или полное ускорение вращающейся точки равно, как и при поступательном движении, сумме тангенциального

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \quad (2.51)$$

и нормального

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (2.52)$$

ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

Раскрывая векторное произведение (2.51), получаем:

$$a_\tau = \varepsilon r \sin \alpha = \varepsilon R, \quad (2.53)$$

то есть тангенциальное ускорение точки пропорционально радиусу окружности, по которой эта точка движется. Отметим, что при *замедленном* вращении ускорения ε и a_τ *отрицательны*.

Величину нормального ускорения находим, раскрывая векторное произведение (2.52):

$$a_n = \omega v \sin \frac{\pi}{2} = \omega \omega R = \omega^2 R. \quad (2.54)$$

Модуль полного ускорения вращающейся точки

$$a = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.55)$$

Уместно обсудить вопрос о *размерностях и единицах измерения* введённых выше кинематических характеристик вращения. Их три: угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение. Угол поворота в СИ измеряется в радианах (рад), а не в градусах. Радиан — безразмерная величина, так как определяется по отношению длины дуги к радиусу, следовательно, угол поворота или угловое перемещение — величина безразмерная. Угловая скорость, следовательно, измеряется в рад/с, а ускорение — в рад/с². Соответствующие размерности: $[\omega] = \text{с}^{-1}$; $[\varepsilon] = \text{с}^{-2}$.

2.6. Кинематические уравнения вращательного движения

Так же, как в случае поступательного движения, пользуясь определением угловой скорости (2.44), найдём выражение, задающее угол поворота в функции времени:

$$d\varphi = \omega dt; \quad \Rightarrow \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt. \quad (2.56)$$

Для случая *равномерного* вращения постоянная величина ω выносится за знак интеграла, и угол поворота будет линейной функцией времени:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (2.57)$$

где φ_0 — угол, определяющий положение тела в начальный момент времени. Полученное уравнение нетрудно несколько изменить, введя N — число полных оборотов, сделанных вращающимся телом за время t . Поскольку один оборот соответствует углу в 2π радиан, то

$$\varphi = 2\pi N. \quad (2.58)$$

Характеризуя вращательное движение, широко применяют понятие *частоты вращения* $\nu = dN/dt$. Эта величина задаёт число оборотов в единицу времени. Учитывая вновь, что один оборот составляет 2π радиан, получаем, что

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (2.59)$$

Единица измерения частоты вращения об/с, а размерность — с^{-1} , такая же, как и у угловой скорости.

Используя две вновь введённые величины и полагая начальный угол равным нулю, можно представить уравнение (2.44) в виде:

$$N = \nu t, \quad (2.60)$$

где N — число оборотов, сделанных равномерно вращающимся телом.

Заметим, что последнее равенство, так же как и исходное (2.57), справедливо лишь для *равномерного* вращения, и его нельзя использовать в случае, если есть ускорение — вращение замедляется либо ускоряется. В этих случаях для интегрирования в (2.56) нужно знать, как угловая скорость зависит от времени. Определение углового ускорения даёт возможность найти эту зависимость. Выражаем из формулы (2.48) приращение угловой скорости за бесконечно малый промежуток времени:

$$d\omega = \varepsilon dt, \quad (2.61)$$

и интегрируем, полагая, что в момент времени $t = 0$ угловая скорость равна ω_0 и угловое ускорение постоянно:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt; \Rightarrow \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t. \quad (2.62)$$

Знак минус в последнем равенстве имеет место для случая отрицательного ускорения, то есть для случая равнозамедленного вращения.

Подставив последнюю формулу в интеграл (2.56), получим уравнение для определения угла поворота, как функции времени (при $\varphi_0 = 0$):

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (2.63)$$

Как и при поступательном движении, при равнопеременном вращении имеем два кинематических уравнения (для угла поворота и для угловой скорости).

Если вращение не равнопеременное ($\varepsilon \neq \text{const}$), то угловая скорость и угол поворота могут быть также найдены интегрированием, если известна зависимость углового ускорения от времени — $\varepsilon(t)$.

Обратная задача — нахождение угловой скорости и углового ускорения по заданной зависимости угла поворота от времени $\varphi(t)$ — решается, как и в случае кинематики точки, дифференцированием:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (2.64)$$

Уравнения кинематики вращательного движения получены нами лишь аналитическим путем — интегрированием уравнений, вводящих понятие угловой скорости как производной от угла поворота и понятие углового ускорения как производной от угловой скорости. Графический метод здесь опущен. Полученные уравнения аналогичны уравнениям кинематики точки. Ниже приведены две таблицы, отражающие эту аналогию.

Таблица 2.1

Понятия кинематики	Обозначения и определения	
	Поступательное движение	Вращательное движение
Перемещение	$d\vec{r}, \Delta\vec{r}$	$d\vec{\varphi}$
Модуль перемещения	$ d\vec{r} = ds, \Delta\vec{r} \leq \Delta s$	$d\varphi, \Delta\varphi$
Путь	s	φ
Скорость	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Модуль скорости	$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ $\omega = \frac{v}{R}$
Средняя скорость	$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$	$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}$
Проекции скорости	$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}$	
Ускорение	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}; \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$
Проекции ускорения	$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad a_y = \ddot{y}; \quad a_z = \ddot{z}$	
тангенциальное	$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$	$a_\tau = \varepsilon R$
нормальное	$a_n = \frac{v^2}{R}$	$a_n = \omega^2 R$
Полное ускорение	$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau;$	$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$

Таблица 2.2

Определяе- мые величины	Кинематические уравнения		
	Поступательное движение		Вращательное движение
	В проекциях	В скалярной форме	
	Равномерное движение		
Ускорение	$a_x = 0$	$a_\tau = 0$	$\varepsilon = 0$
Скорость	$v_x = \text{const}$	$v = \text{const}$	$\omega = \text{const}$
Путь (коор- дината)	$x = x_0 + v_x t$	$s = vt$	$\varphi = \omega t; N = vt$
	Равнопеременное движение		
Ускорение	$a_x = \text{const}$	$a_\tau = \text{const}$	$\varepsilon = \text{const}$
Скорость	$v_x = v_{0x} + a_x t$	$v = v_0 \pm a_\tau t$	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$
Путь (коор- дината)	$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{ a_x t^2}{2}$	$s = v_0 t \pm \frac{ a_\tau t^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{ \varepsilon t^2}{2}$
	Общий случай		
Ускорение	$a_x \neq \text{const}$	$a_\tau \neq \text{const}$	$\varepsilon \neq \text{const}$
Скорость	$v = v_{0x} + \int_0^t a_x dt$	$v = v_0 + \int_0^t a_\tau dt$	$\omega = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon dt$
Путь (коор- дината)	$x = x_0 + \int_0^t v_x dt$	$s = \int_0^t v dt$	$\varphi = \int_0^t \omega dt$

В заключение отметим, что основные понятия кинематики – путь, скорость и ускорение были введены в физику ещё Галилеем. Они достаточно просты и подробно изучаются в средней школе. Позднее была создана кинематика вращательного движения тела. Кинематика точки к этому времени претерпела значительные изменения в связи с появлением понятия вектора и его проекции. В кинематике появились три метода расчёта: естественный, координатный и векторный. Необходимость развития этого раздела физики связана с приложением понятий кинематики к расчёту механизмов и машин. В новом виде кинематика выделилась в большой раздел новой науки — теоретической механики.

В предлагаемых Вашему вниманию таблицах приведены как основные понятия кинематики, так и те, которые используются главным образом в теоретической механике. Мы предлагаем читателям самостоятельно выделить основные понятия кинематики точки и кинематики вращения. Сопоставьте эти понятия и, используя известные Вам из курса средней школы уравнения кинематики точки, напишите уравнения кинематики вращения. И тех и других уравнений должно быть поровну, а именно по три уравнения. Введите в них понятие частоты вращения и полного числа оборотов.

3. ДИНАМИКА

3.1. Понятие силы. Третий закон Ньютона.

Масса инертная и тяготеющая

Этот раздел механики, так же как и кинематика, занимается изучением движения макроскопических тел. Но, в отличие от кинематики, в динамике анализируются причины, вызывающие изменение движения. Динамика оперирует новыми, динамическими, характеристиками движения. Одной из таких характеристик является сила. *Сила является мерой такого взаимодействия тел, при котором эти тела получают ускорение или деформируются.*

Подчеркнём, что понятие силы имеет смысл лишь при наличии двух (как минимум!) тел и является характеристикой их *взаимодействия*. Точнее, сила характеризует воздействие одного тела на другое. Сила, безусловно, должна быть векторной величиной, причём вектором с закреплённой начальной точкой, который нельзя переносить параллельно самому себе, как в кинематике. Вектор силы можно переносить лишь по линии его действия.

Силы всегда возникают парами: если одно тело испытало действие другого тела, то и это второе тело испытало действие первого. Так, любой лежащий предмет давит на горизонтальную опору с силой *нормального давления*, направленной вертикально вниз, а опора действует на предмет с силой *реакции опоры*, направленной вертикально вверх. Величины сил одинаковы, так как характеризуют одно и то же взаимодействие, а направления противоположны. Высказанное выше положение получило название *третьего закона Ньютона*:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \text{ и } F_1 = F_2. \quad (3.1)$$

Одну из сил часто называют *действующей*, вторую — *противодействующей*. Так, закон всемирного тяготения

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}; \quad \text{или} \quad \vec{F} = \gamma \frac{mM}{r^3} \vec{r}, \quad (3.2)$$

описывающий, например, взаимодействие метеорита массой m и Земли массой M при расстоянии r между их центрами, задаёт как силу $\vec{F}_1$, действующую на метеорит, так и силу $\vec{F}_2$, действующую со стороны метеорита на Землю (рис. 3.1). Каждая из них может быть названа силой взаимодействия и рассчитана по приведённому выше закону. На рисунке, поясняющем взаимодействие, изображается лишь сила, действующая на то тело, движение которого рассматривается в задаче.

В физике очень часто используется понятие *системы*, заменяющее понятие тела.

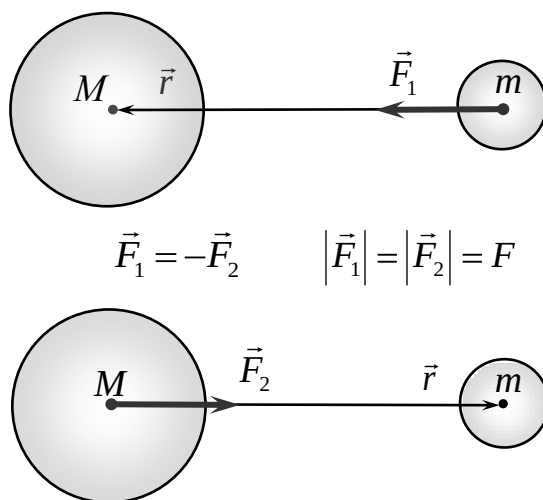


Рис. 3.1

Действительно, Земля в приведённом выше примере может быть названа телом, если абстрагироваться от её конкретной структуры. Вообще же говоря, Земля является совокупностью большого числа тел, и правильнее было бы назвать её системой тел, либо просто системой. Так, при расчёте траектории ракеты её можно считать просто телом. Но, рассматривая вопрос о прочности деталей и их движении внутри ракеты, её нужно принимать за систему.

Силы, действующие на систему, принято делить на внутренние силы и на внешние. *Внутренние* силы характеризуют взаимодействия между телами, составляющими систему, *внешние* — взаимодействие системы с телами, в неё не включёнными.

Если взаимодействуют между собой только тела, включённые в систему, а внешнего взаимодействия нет, то система называется *изолированной* или *замкнутой*.

Второй основополагающей характеристикой движения является понятие *массы*. Оно, так же, как и остальные величины в физике, вводится для описания наблюдаемых явлений. Все хорошо знают, что при одинаковых условиях два разных тела получают разные ускорения: при одном и том же толчке большее ускорение получают пустые санки, нежели нагруженные. Иначе говоря, тяжёлые санки более инертны, менее восприимчивы к движению, чем лёгкие. Их и остановить труднее.

Если назвать характеристику инертности тела *инертной массой* и обозначить её через $m_{\text{и}}$, можно удостовериться специально проведённым опытом, что ускорение обратно пропорционально массе:

$$(m_{\text{и}})_1 a_1 = (m_{\text{и}})_2 a_2 = \dots \quad (3.3)$$

Действительно, если два разных тела, соединённых упругой связью (рис. 3.2), отпустить, они получают разные ускорения, которые легко рассчитать по приведённому выше уравнению.

Обозначим свойство тел притягиваться к Земле через $m_{\text{т}}$, и назовём его *тяготёющей* массой. Две массы одного и того же тела ($m_{\text{т}}$ и $m_{\text{и}}$) вводятся для характеристики свойств тел, проявляющихся по-разному в различных опытах. Нетрудно показать, что масса инертная и масса тяготёющая равны друг другу. Обозначим постоянную величину в (3.3), равную произведению массы на ускорение, через F . Это не противоречит опыту (см. рис. 3.2), поскольку одинаковой для обоих взаимодействующих тел была именно сила. Тогда обратная пропорциональность массы и ускорения запишется так:

$$F = m_{\text{и}} a, \quad (3.4)$$

что означает: в результате действия силы величиной F на тело массы $m_{\text{и}}$, тело получило ускорение величиной a .

Можно провести ещё один опыт, не связанный с первым: положим поочерёдно тела m_1 и m_2 на весы. Показания весов будут характеризовать свойство каждо-

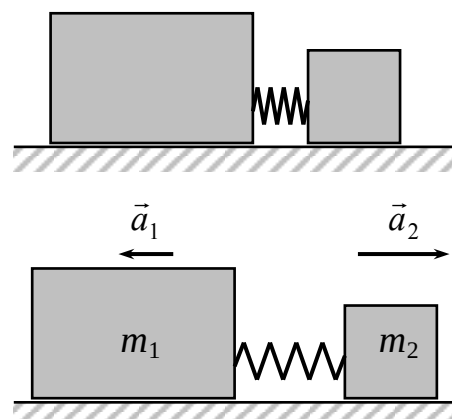


Рис. 3.2

го из тел притягиваться к Земле, и это притяжение будет для второго тела не таким, как для первого. Используя уравнение для описания взаимодействия тела с Землей при его свободном падении, и учитывая, что тело движется с ускорением g , будем иметь:

$$F = m_u g. \quad (3.5)$$

Эта же сила взаимодействия тела и Земли может быть также найдена по закону всемирного тяготения (3.2), в который тоже войдет масса тела, но уже иная — тяготеющая, поскольку в законе не говорится об ускорении. Приравняв правые части обсуждаемых равенств, получим:

$$m_u g = \gamma \frac{m_T M}{r^2}. \quad (3.6)$$

Предполагая, что

$$m_T = m_u, \quad (3.7)$$

получаем

$$g = \gamma \frac{M}{r^2}. \quad (3.8)$$

Результат удивителен тем, что из него следует очень важный вывод: *ускорение свободного падения для всех тел, находящихся на данной планете одинаково*. Этот факт проверен ещё Галилеем, и хорошо известен. Из постоянства g следует справедливость гипотезы о равенстве масс инертной и тяготеющей. И в настоящее время продолжают проверять эту гипотезу, измеряя ускорение свободного падения разных тел более точными методами.

Заметим попутно, что известная нам величина ускорения свободного падения $9,8 \text{ м/с}^2$, является такой лишь вблизи поверхности Земли, где r можно принять за радиус Земли. При увеличении расстояния от Земли ускорение свободного падения, естественно, уменьшается, но остаётся одинаковым для тел разной массы.

3.2. Второй закон Ньютона. Условия возникновения движения. Закон инерции

Второй закон Ньютона называют *основным законом динамики*. Он, как и всё, о чём говорилось выше, есть обобщение наблюдений и опытов. Вместе с тем, этот закон, по определению А. Эйнштейна, есть первая ступень абстракции в физике, фактически её начало. Дело в том, что, наблюдая за окружающими нас явлениями, мы убеждаемся, что любое движение связано с силой: поезд движется до тех пор, пока работает его двигатель. Не будет силы, не будет и движения. Эти заключения верны лишь в тех условиях, которые наблюдаются на Земле, то есть при наличии трения.

Если представить, что силы трения исчезли, то движение представится нам возможным и без действия силы: шайба, брошенная по льду, будет скользить по нему бесконечно долго, тем дольше, чем меньше трение. Планеты и другие небесные тела движутся, не теряя своей скорости, потому что их движению практически ничего не мешает. В число небесных тел мы теперь можем включить и ис-

кусственные спутники Земли, которые движутся там, где плотность атмосферы мала, поэтому их скорости уменьшаются медленно.

Когда есть трение или сопротивление среды, равномерное движение требует наличия силы, уравнивающей это сопротивление. При равенстве силы трения и уравнивающей силы тело будет двигаться равномерно, без ускорения. Итак: если сумма сил равна нулю, то ускорение отсутствует:

$$\sum \vec{f}_i = 0, \Rightarrow \vec{a} = 0. \quad (3.9)$$

При нарушении этого условия тело получает ускорение. В этом случае сумма сил не равна нулю, и ускорение совпадает по направлению с равнодействующей этих сил:

$$\sum \vec{f}_i = m\vec{a}. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) является математической формулировкой *второго закона Ньютона* для тела с постоянной массой. Облекая его в словесную форму, можно сказать: *ускорение, с которым движется тело, прямо пропорционально сумме сил, действующих на него, совпадает по направлению с равнодействующей этих сил и обратно пропорционально массе этого тела*. Заметим, что это утверждение справедливо при выполнении ещё одного условия: система отсчёта, в которой рассматривается движение тела, является *инерциальной*, то есть эта система отсчёта движется *равномерно* (её ускорение $a_{\text{системы}} = 0$) и *прямолинейно* или покоится.

Для иллюстрации 2-го закона Ньютона рассмотрим два примера. На рис. 3.3 изображены два различных движения одного и того же шарика, подвешенного на нити, отклонённой на угол α от вертикали.

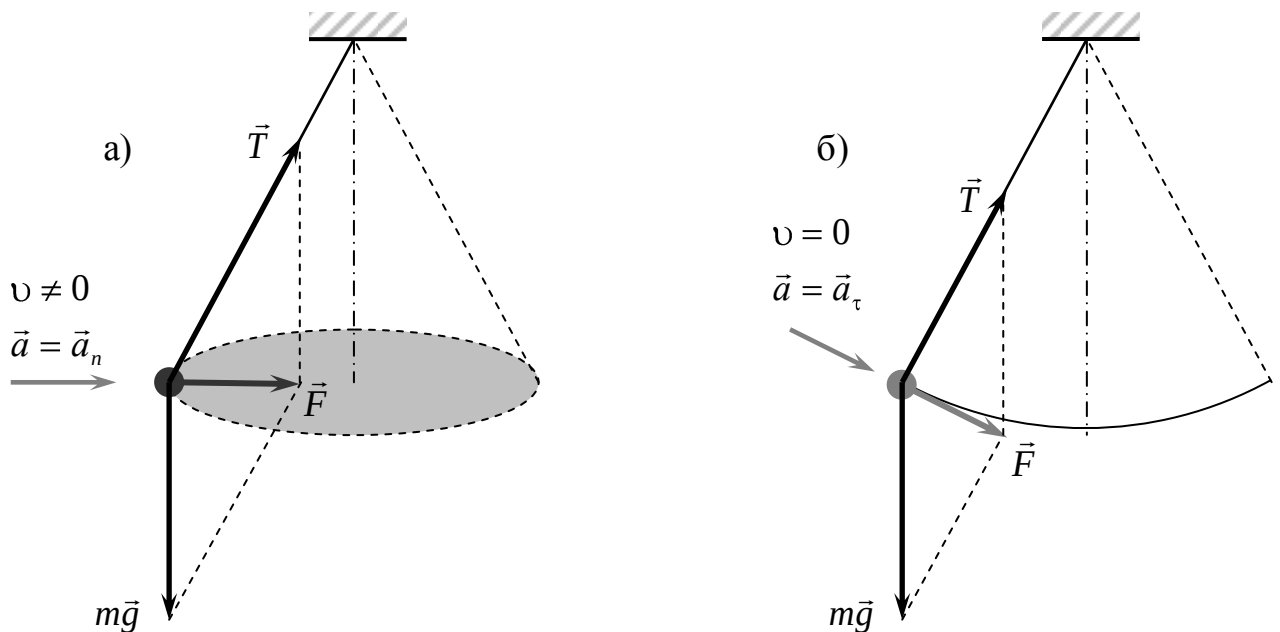


Рис. 3.3

На рис. 3.3а шарик совершает *вращательное* движение в горизонтальной плоскости, а на рис. 3.3б — *колебательное* движение в вертикальной плоскости.

В обоих случаях на шарик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$, причём направления одноимённых сил одинаковы. Однако ускорения, с которыми движутся шарики под действием этих двух сил, различны, хотя бы потому, что направлены по-разному. Следовательно, в соответствии со 2-м законом Ньютона, и равнодействующие этих сил должны быть направлены по-разному.

В первом случае равнодействующая сила, равная сумме сил $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ будет направлена к центру окружности, поскольку шарик движется с постоянной скоростью, и его полное ускорение равно *нормальному* ускорению.

Во втором случае шарик качается как маятник, его траектория уже иная. Величина и направление скорости шарика в каждой точке траектории имеют своё значение. В крайнем положении скорость равна нулю, а в положении равновесия она максимальна. Следовательно, в крайних точках нормальное ускорение равно нулю, полное ускорение равно тангенциальному и направлено по касательной к траектории. Поэтому и сумма сил будет направлена по касательной. Если в первом случае угол прямой между силой тяжести и равнодействующей силой, то во втором случае угол уже между силой натяжения нити и равнодействующей. Соответственно разными будут и модули равнодействующих сил:

$$\text{а) } F = mgtg\alpha; \quad \text{б) } F = mgsin\alpha.$$

Равенство (3.9), представленное ранее как частный случай 2-го закона Ньютона, можно назвать *законом инерции*. Этот закон был сформулирован ещё Галилеем: *в инерциальных системах отсчёта тело движется равномерно и прямолинейно, либо покоится, пока внешние воздействия не выведут его из этого состояния*. Равномерное и прямолинейное движение и покой — случаи, когда ускорение тела равно нулю. Это имеет место, если на тело *не действуют силы* или *сумма всех сил*, приложенных к телу, *равна нулю*. Напомним, что здесь имеются в виду *внешние* по отношению к телу силы.

Отметим ещё один, чрезвычайно существенный вывод, который следует непосредственно из закона (3.10). Речь идёт о процессе возникновения движения, т.е. переходе от покоя к движению. Этот процесс обязательно связан с наличием ускорения, что зачастую упускают из виду. Действительно, в состоянии покоя скорость тела равна нулю, а в момент возникновения движения она возрастает до какой-то конечной величины. Появление же ускорения невозможно, если сумма внешних воздействий равна нулю. Переход от покоя к движению в доступных нашему повседневному наблюдению условиях происходит за счёт внешних по отношению к любому движущемуся телу взаимодействий с окружающей средой. Птица летит, отталкиваясь крыльями от воздуха, рыба плавёт, отталкиваясь плавниками от воды, а все перемещающиеся по земле предметы различными способами отталкиваются от её поверхности. Если уменьшить взаимодействие с внешней средой, движение системы будет затруднено, либо прекратится совсем, что мы испытывали сами, становясь на скользкий лёд.

Получается, что в случае, когда система изолирована, переход от покоя к движению всей системы *в одном направлении* невозможен. Можно ли вообще

управлять движением в высоких слоях атмосферы, где внешняя среда очень разрежена, или там, где её совсем нет? Второй закон Ньютона, в том виде (3.10), в котором мы его записали, даёт на этот вопрос отрицательный ответ.

3.3. Понятие импульса и закон его сохранения. Реактивное движение

Существует ещё одна динамическая характеристика движения: *импульс тела* или иначе — *количество движения*. Эта векторная величина равна произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (3.11)$$

Импульс системы равен векторной сумме импульсов тел, составляющих систему, и является одной из основных характеристик движения. Его изменение может происходить как за счет изменения массы, так и за счет изменения скорости:

$$d\vec{p} = d(m\vec{v}) = m d\vec{v} + \vec{v} dm. \quad (3.12)$$

При неизменной массе системы ($m = \text{const}$), очевидно

$$d\vec{p} = m d\vec{v}. \quad (3.13)$$

Последнее равенство позволяет несколько иначе взглянуть на второй закон Ньютона. Изменим запись этого закона, заменив ускорение через производную скорости по времени, и обозначив сумму внешних сил через $\vec{F}$:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (3.14)$$

С учётом равенства (3.13) получим окончательно

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (3.15)$$

Это равенство также выражает второй закон Ньютона, только в более общем виде, чем ранее.

Действительно, в выражении (3.14), выражающем этот закон в привычной для нас форме, масса вынесена за знак дифференциала, т.е. постоянна. Вводя в уравнение (3.15) изменение импульса, мы тем самым обобщаем закон на случай движения тела с любой, в том числе и переменной массой, поскольку это изменение раскрывается по (3.12).

Уравнение второго закона Ньютона с использованием понятия импульса даёт возможность получить один из важнейших законов механики — закон сохранения импульса. Действительно, если рассмотреть изолированную систему, то при

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow d\vec{p} = 0 \text{ и } \vec{p} = \text{const}. \quad (3.16)$$

Или словами: *импульс изолированной системы есть величина постоянная. Это и есть закон сохранения импульса.*

Очень часто в сложных системах возможны внутренние взаимодействия. По закону сохранения они не изменяют импульс системы в целом, а коснутся лишь импульсов её частей. Пусть до взаимодействий (внутренних) импульс системы состоял из импульсов двух её частей:

$$\vec{p}_{до} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \quad (3.17)$$

После взаимодействия

$$\vec{p}_{после} = \vec{p}_3 + \vec{p}_4, \quad (3.18)$$

где $\vec{p}_3$ и $\vec{p}_4$ — импульсы тех же двух частей системы, но уже после внутреннего взаимодействия. Поскольку внешних взаимодействий не было, так как система изолирована, то импульс её сохранился постоянным, значит:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4. \quad (3.19)$$

Теперь закон сохранения импульса можно сформулировать так: *сумма импульсов частей изолированной системы до взаимодействия равна сумме импульсов частей этой системы после взаимодействия*. Здесь, конечно, имеется в виду векторная (геометрическая) сумма.

Рассмотрим наиболее яркий пример применения этого закона. Он познакомит нас с новым принципом движения, не следующим непосредственно из второго закона Ньютона в его "школьной" записи (3.10). На рис. 3.4а изображена изолированная система, находящаяся в покое, поэтому её импульс равен нулю.

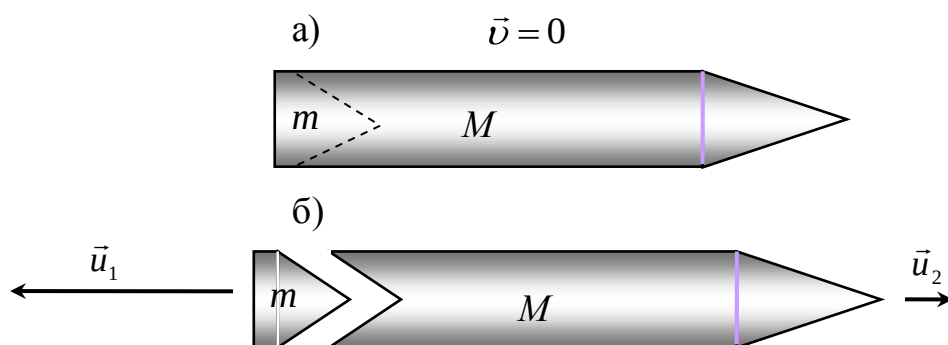


Рис. 3.4

На рис.3.4б представлена ситуация, когда в результате внутреннего взаимодействия произошёл выброс массы m со скоростью $\vec{u}_1$, и закон сохранения импульса требует, чтобы равный по величине и противоположный по направлению импульс получила оставшаяся масса M .

Импульс системы до взаимодействия:

$$\vec{p} = (m + M)\vec{v} = 0. \quad (3.20)$$

Импульс системы после взаимодействия, в соответствии с законом сохранения импульса, также равен нулю:

$$\vec{p} = m\vec{u}_1 + M\vec{u}_2 = 0. \quad (3.21)$$

Следовательно,

$$m\vec{u}_1 = -M\vec{u}_2. \quad (3.22)$$

Заменив векторы их модулями, получим

$$mu_1 = Mu_2. \quad (3.23)$$

Уравнение (3.22) указывает направление возникшего движения, (3.23) даёт возможность вычислить его скорость.

Второй закон Ньютона (3.10) исключает возможность движения системы без внешней среды. Закон сохранения импульса его предсказывает. Для движения в

пустоте нужно использовать *реактивные двигатели*, работающие по принципу выброса масс. Идея применения реактивных двигателей для межпланетных путешествий принадлежит теоретику космонавтики К.Э. Циолковскому.

3.4. Упругий удар

Упругий удар определён в физике как удар, меняющий только направление скорости, но оставляющий без изменения её величину. Этот случай очень важен в ядерной физике при рассмотрении взаимодействия отдельных атомов и элементарных частиц. При *абсолютно упругом* ударе сохраняется не только импульс системы, но и её кинетическая энергия. Ниже мы приводим два возможных случая этого удара на примере двух тел, имеющих форму шаров (рис. 3.5).

Удар, происходящий не по центру.

Пусть до удара двигался лишь первый шар, а второй покоился. Как и ранее, скорости шаров до удара обозначим буквой $\bar{v}$, а скорости после удара – $\bar{u}$.

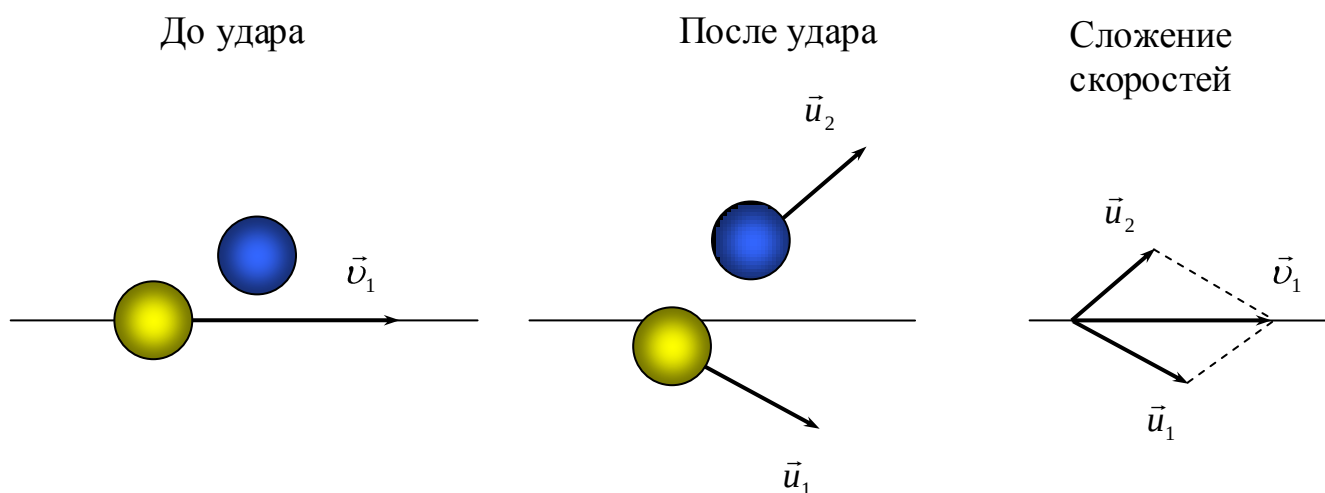


Рис. 3.5

Закон сохранения импульса для подобных случаев выражается векторным равенством

$$m_1 \bar{v}_1 = m_1 \bar{u}_1 + m_2 \bar{u}_2, \quad (3.24)$$

где в правой части стоят импульсы обоих тел после удара.

Левая часть равенства состоит из одного члена, поскольку лишь один из двух шаров двигался до удара. Уравнение содержит две неизвестные скорости, поэтому приходится использовать еще и закон сохранения энергии, в который войдут эти же неизвестные:

$$m_1 v_1^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \quad (3.25)$$

Любопытный результат можно получить сразу, без каких-либо математических преобразований, если массы соударяющихся тел одинаковы. Тогда

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \quad v_1^2 = u_1^2 + u_2^2. \quad (3.26)$$

Первое равенство свидетельствует, что векторы скорости образуют треугольник (или параллелограмм), как того требуют правила их сложения (рис. 3.5). Из второго равенства следует, что этот треугольник будет прямоугольным, так как имеет место теорема Пифагора.

Таким образом, в случае удара летящего шара о неподвижный шар такой же массы, шары всегда разлетаются под *прямым* углом. Скорости же их после удара могут быть разными, так же, как и углы, под которыми они расходятся, по отношению к линии первоначального движения:

Центральный удар.

Иначе этот тип удара называют лобовым. Он изображён на рис. 3.6.

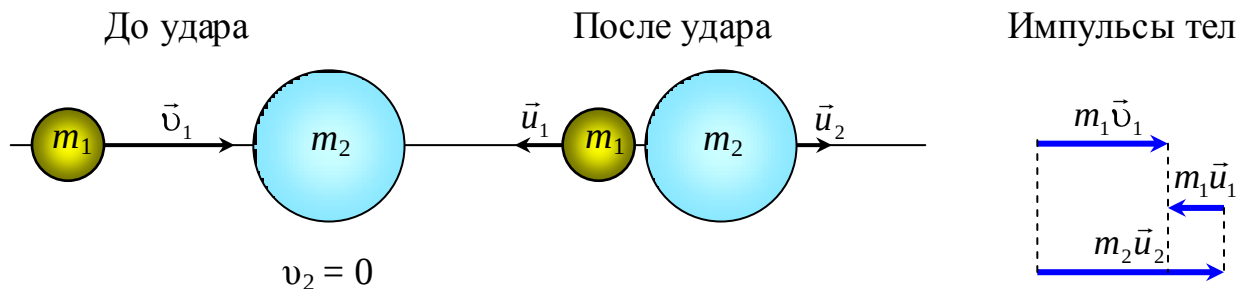


Рис. 3.6

Рассмотрим простейший случай, когда до удара движется только один шар, а второй покоится. Нужно найти скорости обоих шаров после удара. Законы сохранения импульса (3.24) и энергии (3.25) остаются справедливыми и для этого случая. Но, поскольку при лобовом ударе оба шара будут двигаться по прямой, совпадающей с направлением скорости летящего шара, то векторы скоростей в законе сохранения импульса можно заменить их проекциями. Тогда равенства (3.24) и (3.25) запишутся так:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2; \quad m_1 v_1^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \quad (3.27)$$

Здесь под v_1 , u_1 , u_2 подразумеваются не модули скоростей, а их проекции на направление движения первого шара, которые могут быть как положительными, так и отрицательными. Нетрудно сообразить, что отрицательной может быть только проекция u_1 , поскольку первый шар после удара о тяжёлое тело может отскочить назад.

Найдём сначала связь между тремя скоростями. Она получается особенно просто, если из первого уравнения (3.27) выразить импульс второго шара, а из второго — последний член:

$$\begin{aligned} m_2 u_2 &= m_1 (v_1 - u_1) \\ m_2 u_2^2 &= m_1 (v_1^2 - u_1^2). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Поделив второе уравнение на первое, получим соотношение между скоростями:

$$u_2 = v_1 + u_1. \quad (3.29)$$

Теперь заменим в первом уравнении (3.28) скорость u_2 на сумму скоростей по (3.29) и выразим скорость первого шара после удара:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1. \quad (3.30)$$

Из этого уравнения следует, что u_1 будет положительна, если второй шар легче первого, и отрицательна, если $m_2 > m_1$, что подтверждает приведённые выше соображения. При равенстве масс скорость $u_1 = 0$, то есть первый шар после удара остановится, и его импульс станет равным нулю. Поскольку импульс изолированной системы не изменяется, то он должен перейти ко второму шару, который придёт в движение со скоростью, равной скорости первого шара перед ударом.

Вообще же скорость второго тела, так же как и первого, зависит от соотношения масс сталкивающихся тел. Подставив u_1 (3.30) в (3.29), получим формулу для вычисления скорости второго шара после удара:

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (3.31)$$

Эта скорость всегда положительна, и при $m_2 = m_1$ равна скорости налетающего шара, как мы и предполагали заранее. Из этого уравнения также следует, что в случае удара о неподвижное тело существенно большей массы последнее получит очень малую скорость, то есть практически не придёт в движение. Равенство же (3.29) свидетельствует о том, что если $\vec{u}_2 = 0$, то первый шар в результате удара поменяет лишь направление своей скорости, а её величина не изменится. То есть, в этом случае налетающий шар отскакивает после удара без потери скорости ($\vec{u}_1 = -\vec{v}_1$), а неподвижный и после удара имеет нулевую скорость ($\vec{u}_2 \approx 0$).

Приведённые выкладки и полученные выражения для скоростей частиц после удара и позволяют сделать следующие важные для практики выводы.

- Если соударяются частицы равной массы, то они обмениваются скоростями — летевшая частица останавливается ($\vec{u}_1 = 0$), а покоившаяся частица начинает двигаться в том же направлении и с той же скоростью, которой обладала до удара первая частица ($\vec{u}_2 = \vec{v}_1$).
- Если же летящая частица ударяется о покоящееся тело существенно большей массы, такой, что массой m_1 можно пренебречь, скорость ее лишь меняет знак на противоположный — частица отскакивает после удара без потери скорости ($\vec{u}_1 = -\vec{v}_1$), а массивное тело и после удара имеет нулевую скорость ($\vec{u}_2 \approx 0$).

Примеры из практики: первый случай — соударение бильiardных шаров; второй случай — отскок мяча от стенки или пола.

- Если частицу нужно только замедлить, а не остановить, на её пути следует поставить тело, массу которого можно рассчитать по соотношению (3.30), задав желаемое отношение скоростей первой частицы до и после удара.

С подобной ситуацией и встретились физики в 1939–1941 годах, когда для осуществления цепной реакции деления ядер урана им пришлось искать вещество, атомы которого могли бы в нужном отношении уменьшить скорость быстрых нейтронов без их поглощения.

3.5. Понятия момента инерции и момента силы. Второй закон Ньютона для вращения

Наблюдения показывают, что сила не является достаточно полной характеристикой взаимодействия вращающихся тел: результат воздействия зависит от того, на каком расстоянии от оси вращения и в каком направлении приложена эта сила. Поэтому необходимо ввести новое понятие — *момент силы* $\vec{M}$, как векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ точки, в которой приложена сила, на вектор силы $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (3.32)$$

Момент силы должен определять не только величину внешнего воздействия, но и его направление, поэтому вектор момента силы удобно направлять по оси вращения, задав этим и ось, и направление вращения. Чтобы выполнить последнее, удобнее всего воспользоваться правилом буравчика, совмещая его вращение с тем направлением вращения, которое получило бы тело под действием приложенной силы. Поступательное движение буравчика покажет при этом направление вектора момента силы (рис. 3.7).

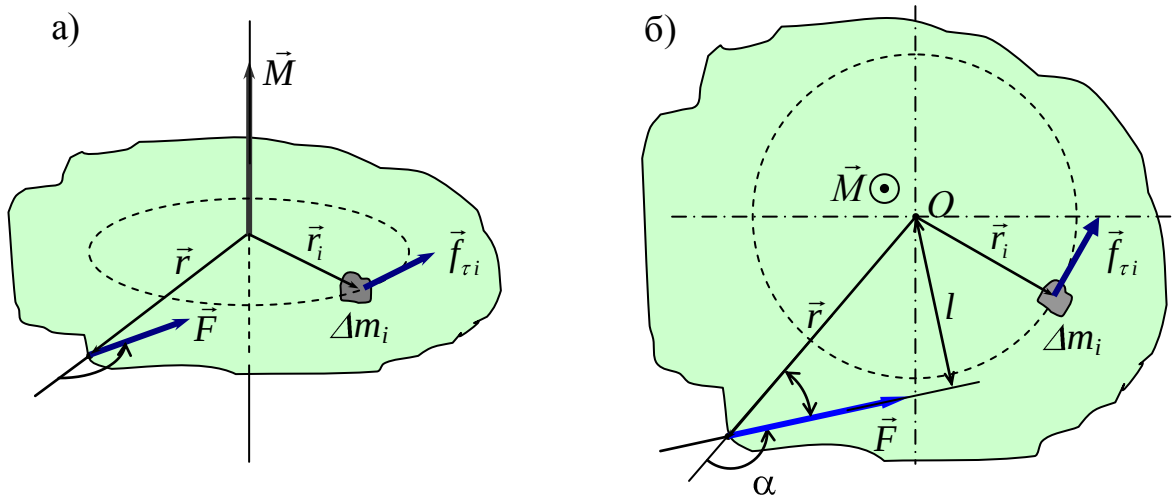


Рис. 3.7

В определении момента силы участвуют три вектора. Два из них ($\vec{r}$ и $\vec{F}$) являются сомножителями векторного произведения. Они записаны в таком порядке, чтобы направление вектора $\vec{M}$, определённое по правилу векторного умножения, совпало с тем направлением, которое получается по правилу буравчика.

Численное значение, или модуль M момента силы — это модуль векторного произведения, который, по определению, равен произведению модулей векторов-сомножителей на синус угла между ними:

$$M = Fr \sin \alpha = Fl, \quad (3.33)$$

где l — плечо силы F (см. рис. 3.7б).

Наблюдения также показывают, что масса вращающегося тела тоже не является достаточной характеристикой инертности. Например, диск с равномерно распределённой по нему массой имеет иную инертность, нежели обруч с такими

же массой и радиусом. Обруч будет медленнее приходить во вращение и медленнее останавливаться. Следовательно, мера инертности вращающегося тела должна зависеть не только от массы, но и от её распределения относительно оси вращения. Строгое определение меры инертности при вращательном движении — *момента инерции* — будет дано ниже.

Основной закон динамики вращающихся тел можно получить, опираясь на соответствующий закон для материальной точки, поскольку любое вращающееся тело можно разбить на отдельные элементы массой Δm_i , каждый из которых можно принять за материальную точку (см. рис. 3.7). Для каждого из этих элементов будет справедлив второй закон Ньютона:

$$\vec{f}_{ti} = \vec{a}_{ti} \Delta m_i, \quad (3.34)$$

где $\vec{f}_{ti}$ — сумма внешних тангенциальных сил, а $\vec{a}_{ti}$ — тангенциальное ускорение элемента массы Δm_i . Конечно, силы не всегда тангенциальны. Тогда их следует разложить на две составляющие: касательную и нормальную по отношению к траектории каждой точки. Нормальная составляющая не вызывает никакого изменения угловой скорости, а лишь деформирует или смещает ось вращения, поэтому далее её не следует включать в рассмотрение. На рис. 3.7 изображена тангенциальная составляющая суммарной силы, действующей на элемент Δm_i .

Для того чтобы уравнение (3.28) содержало характеристики вращения, помножим обе его части на $\vec{r}_i$, сохраняя при этом порядок следования векторов, принятый в определении момента силы (3.27):

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ti} = \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_{ti}, \quad (3.35)$$

или, если выразить тангенциальное ускорение через угловое ускорение и радиус по (2.51),

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ti} = \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_{ti} = \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{\epsilon} \times \vec{r}_i. \quad (3.36)$$

Полученное здесь в правой части равенства *двойное векторное произведение* раскрывается по известному правилу «бац минус цаб» (*bac* минус *cab*):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{b}ac \cos(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}ab \cos(\vec{a}, \vec{b}), \quad (3.37)$$

где $(\vec{a}, \vec{c})$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$ и т. д. Для нашего случая

$$\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\epsilon}) = \vec{\epsilon}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\epsilon}) = \vec{\epsilon}r^2 \cos 0 - \vec{r}r\epsilon \cos \frac{\pi}{2} = r^2 \vec{\epsilon}. \quad (3.38)$$

Тогда равенство (3.35) запишется так:

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ti} = \Delta m_i r_i^2 \vec{\epsilon}. \quad (3.39)$$

В последнем выражении уже использованы характеристики вращения — момент силы и угловое ускорение. Но этот закон имеет место пока только для малого элемента массы вращающегося твердого тела.

Суммируя обе части равенства (3.34)

$$\sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ti} = \sum (\Delta m_i r_i^2) \vec{\epsilon}, \quad (3.40)$$

а затем, переходя к бесконечно малым величинам ($\Delta m_i \rightarrow dm$) и заменяя суммирование интегрированием, получаем:

$$\vec{M} = \vec{\varepsilon} \int r^2 dm, \quad (3.41)$$

где $\vec{M} = \sum \mathbf{r} \times \vec{f}_{it}$ — сумма моментов внешних сил. Обозначив интеграл в правой части через I , назовем его *моментом инерции*. Размерность этой новой величины может быть получена из только что выведенного определения:

$$I = \int r^2 dm. \quad (3.42)$$

По своему физическому смыслу момент инерции аналогичен массе — определяет инертность вращающегося тела, которая зависит не только от массы, но и от её расположения относительно оси вращения. В зависимости от условий интегрирования (пределов), формулы для расчёта моментов инерции тел различной формы будут разными. Используя понятие момента инерции, получим *основной закон динамики вращательного движения* (аналог второго закона Ньютона):

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}. \quad (3.43)$$

Так же, как и в случае поступательного движения, имеем: изолированная система ($\vec{M} = 0$) может либо покоиться, либо вращаться равномерно.

3.6. Понятие момента импульса и закон его сохранения

По аналогии с определением импульса материальной точки введём понятие *момента импульса* твердого тела

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \quad (3.44)$$

который направлен так же, как и вектор угловой скорости, то есть по оси вращения в соответствии с правилом буравчика. Момент импульса называют также моментом количества движения. Изменение момента импульса

$$d\vec{L} = d(I\vec{\omega}), \quad (3.45)$$

или, при постоянном I ,

$$d\vec{L} = Id\vec{\omega}. \quad (3.46)$$

Нетрудно заметить, что второй закон Ньютона для вращения (3.43) соответствует как раз варианту (3.46), то есть, справедлив для случая, когда момент инерции не изменяется:

$$\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{Id\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon}. \quad (3.47)$$

Воспользовавшись понятием момента импульса, получим общий вид основного закона динамики для вращательного движения, который применим и для вращения с изменяющимся моментом инерции:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (3.48)$$

Закон, записанный в такой форме, даёт возможность сформулировать *закон сохранения момента импульса*. Пусть система изолирована, значит $\vec{M} = 0$. Тогда и $d\vec{L} = 0$, то есть момент импульса не изменяется. Иначе: *момент импульса изолированной системы есть величина постоянная*. Так формулируется *закон сохранения момента импульса*.

Равенство (3.48) имеет несколько интересных следствий. Первое из них очевидно: записанный выше закон свидетельствует об обратной пропорциональности входящих в него величин. При изменении момента инерции вращающейся системы, которое происходит в результате внутренних взаимодействий, угловая скорость меняется в противоположном направлении. Очень часто этим законом (естественно, бессознательно) пользуются животные и люди. Так, гимнаст, чтобы сделать сальто, во время прыжка вытягивается во весь рост и поднимает вверх руки. Его момент инерции относительно горизонтальной оси при этом максимален. Толкнувшись, он сгибается, прижимая голову к коленям. При этом резко уменьшается его момент инерции, что приводит к такому же возрастанию скорости вращения. Подобным же приёмом пользуются при вращениях фигуристы и балерины. Только они меняют свой момент инерции относительно вертикальной оси, разводя руки в стороны и прижимая их к груди. В последнем случае момент инерции резко падает, а угловая скорость возрастает.

Выше мы познакомились с проявлением закона сохранения момента импульса. Теперь речь пойдёт о его использовании. Момент импульса — векторная величина, поэтому закон сохранения связан не только с постоянством входящего в него произведения, но и с *постоянством направления оси вращающегося тела*. По ней направлен вектор угловой скорости. В силу закона сохранения момента импульса *угловая скорость вращающегося тела постоянна, если система изолирована, и момент инерции не меняется внутренними взаимодействиями*. Постоянство направления оси вращения изолированной системы носит название *гироскопического эффекта*. Последний лёг в основу гироскопов — приборов, с помощью которых поддерживается строго постоянным заданное направление.

Если на вращающееся тело под углом к оси вращения действует постоянная сила, ось не меняет заданного направления, а её конец начинает описывать окружность. Явление носит название *прецессии*. Приведём пример. Ствол нарезного оружия задаёт снаряду, движущемуся внутри него, вращательное движение. Во время полёта на снаряд действует сила сопротивления воздуха, которая не только замедляет движение снаряда, но и стремится изменить его ориентацию. В результате вращающийся снаряд начинает прецессировать вокруг направления своей траектории. Без вращения сопротивление воздуха привело бы к опрокидыванию, «кувырканию» снаряда в полёте.

Когда система сложная и состоит из нескольких частей, каждая из которых может вращаться, момент импульса можно представить как геометрическую сумму соответствующих моментов её частей:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots \quad (3.49)$$

Внутренние взаимодействия могут менять лишь моменты импульсов частей, общий же момент импульса системы остаётся постоянным:

$$\vec{L}_{до} = \vec{L}_{после}, \quad \text{или} \quad \vec{L}_{11} + \vec{L}_{21} + \dots = \vec{L}_{12} + \vec{L}_{22} + \dots \quad (3.50)$$

где второй индекс имеет два значения: 1 — до взаимодействия, и 2 — после взаимодействия.

3.7. Работа переменной силы при поступательном движении и при вращении

Работой силы в механике называют физическую величину, равную скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения. При бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$ сила $\vec{F}$ совершает элементарную работу

$$dA = \vec{F} d\vec{r}. \quad (3.51)$$

Значение скалярного произведения, как известно, зависит от косинуса угла между векторами (рис. 3.8):

$$dA = F ds \cos \alpha. \quad (3.52)$$

Здесь модуль бесконечно малого перемещения заменён бесконечно малым отрезком пути. Уравнения (3.51) и (3.52) равносильны и являются определениями элементарной работы. При конечных (не бесконечно малых) перемещениях работа равна сумме элементарных работ и определяется интегрированием:

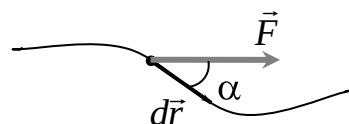


Рис. 3.8

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F ds \cos \alpha = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds, \quad (3.53)$$

где $F_s = F \cos \alpha$ — проекция силы на перемещение. Очевидно, что на графике зависимости $F_s(s)$ работа будет равна площади под графиком силы.

Определение работы позволяет установить её знак. Очевидно, что он зависит от угла между силой и направлением перемещения. При остром угле $\cos \alpha$ положителен, а при тупом угле — отрицателен. Такой же знак имеет работа. Если же сила направлена под прямым углом к перемещению, то её работа равна нулю.

Ранее мы поделили силы по отношению к рассматриваемой системе на внешние и внутренние. Эта градация проявляется и при нахождении работы. Пусть пружина растянута внешней силой на величину x . При растяжении перемещение происходило в направлении действующей силы, и её работа положительна. Но при этом упругая сила системы была направлена к положению равновесия, т.е. составляла с перемещением угол 180° градусов, значит, работа упругой силы здесь отрицательна ($\cos 180^\circ = -1$). При уменьшении длины растянутой пружины работа упругой силы будет положительной.

На рис. 3.9 изображены три позиции: равновесие тела, когда пружина не деформирована, и случаи сжатой и растянутой пружины. Показана упругая сила системы, работа которой в обоих случаях положительная, поскольку производится силами системы.

Найдём работу, совершаемую упругой силой при растяжении пружины от $x_1 = 0$ до $x_2 = x$. Так как, по закону Гука, проекция силы упругости на ось OX

$$F_x = -kx, \quad (3.54)$$

то в соответствии с (3.53) работа этой переменной силы определится интегрированием:

$$A = \int_0^x -kx dx = -\frac{kx^2}{2}, \quad (3.55)$$

и действительно будет отрицательной. При возвращении к недеформированному состоянию пределы интегрирования в (3.55) меняются местами, и работа будет положительной.

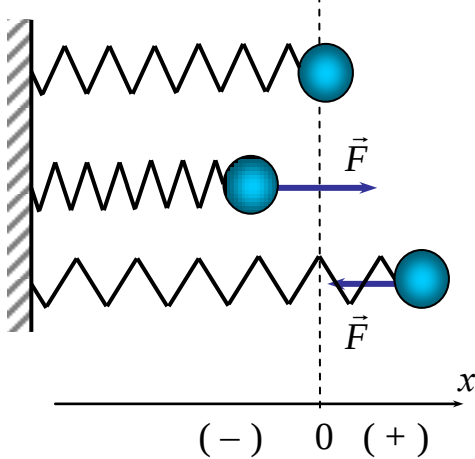


Рис. 3.9

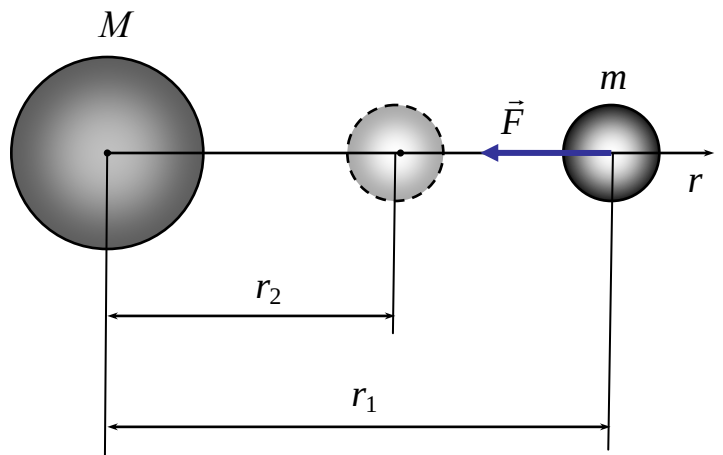


Рис. 3.10

Работа гравитационной силы по сближению тел массами M и m (рис. 3.10) найдётся аналогично. Так как расстояние r уменьшается, то приращение dr координаты берётся со знаком минус. Тогда

$$A = \int_{r_1}^{r_2} -\gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \gamma \frac{Mm}{r_2} - \gamma \frac{Mm}{r_1}. \quad (3.56)$$

Работа здесь положительна: она производится силами системы, которые стремятся уменьшить расстояние между телами. При увеличении расстояния между телами сила тяготения совершает отрицательную работу, так как направлена против перемещения.

Аналогично и при вычислении работы *силы тяжести* $m\vec{g}$. При падении тела (рис. 3.11) его перемещение совпадает с направлением силы тяжести, и её работа положительна.

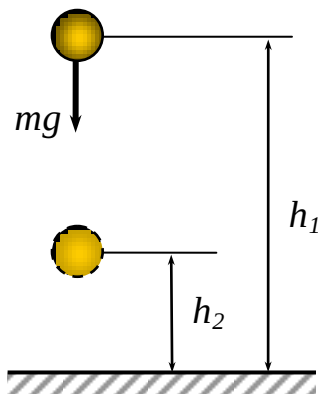


Рис. 3.11

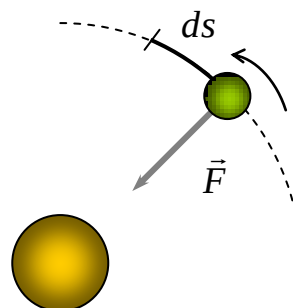


Рис. 3.12

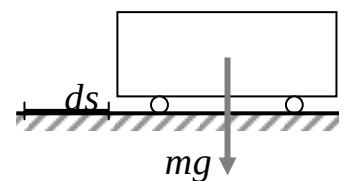


Рис. 3.13

Поскольку высота h при этом уменьшается, то приращение dh нужно брать со знаком минус.

Полагая, что ускорение свободного падения не зависит от высоты, вычислим работу силы тяжести при перемещении тела с высоты h_1 до высоты h_2 :

$$dA = mgds = -mgdh, \quad \text{и} \quad A = - \int_{h_1}^{h_2} mgdh = mg(h_1 - h_2). \quad (3.57)$$

Если тело перемещается перпендикулярно силе тяжести, то её работа будет равна нулю. Например, при движении тела по круговой орбите, при движении по горизонтальному участку пути (рис. 3.12 и 3.13). Однако в последнем случае система может совершать работу против сил трения, которая нулю не равна.

Выражение (3.52) нетрудно преобразовать для вычисления работы при вращательном движении. В этом случае $\cos \alpha = \pm 1$, ds заменяется через $d\varphi$ и вместо силы пишется её замена при вращательном движении — момент силы:

$$ds = r d\varphi, \quad M = \pm Fr \quad \text{и} \quad dA = \pm M d\varphi. \quad (3.58)$$

Введём понятие *мощности*, как скорости совершения работы:

$$P = \frac{dA}{dt}, \quad (3.59)$$

где dt — бесконечно малый промежуток времени, за который совершена работа dA . Заменяя элементарную работу скалярным произведением силы на перемещение (3.51), получаем выражение для мощности силы, точка приложения которой движется со скоростью $\vec{v}$:

$$P = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v} = Fv \cos \alpha, \quad (3.60)$$

где α — угол между векторами силы и скорости.

Для вращательного движения, как нетрудно показать, мощность равна произведению момента силы на угловую скорость:

$$P = \pm M\omega. \quad (3.61)$$

3.8. Работа в потенциальном поле. Потенциальная энергия

Рассмотрим случай, когда тело перемещается в поле тяготения вблизи поверхности Земли. Пусть это перемещение происходит не по горизонтальной поверхности, а по наклонной плоскости (рис. 3.14). Поднять тело на высоту h могут только сторонние по отношению к системе «тело—Земля» силы. Работа системы здесь будет отрицательной, поскольку она совершается против силы тяжести. Если пренебречь трением, то минимальная сила $\vec{F}$, достаточная для подъёма, будет меньше силы тяжести и равна по величине равнодействующей двух сил: силы тяжести и силы реакции опоры:

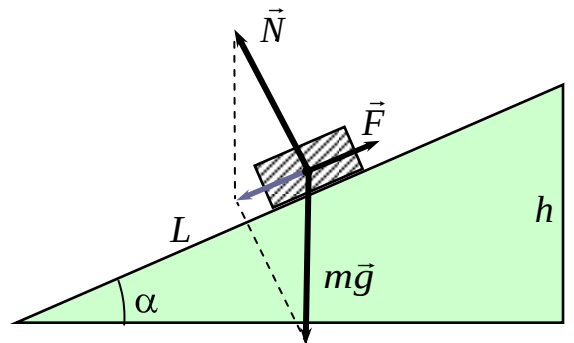


Рис. 3.14

$F = |\vec{N} + m\vec{g}| = mgsin\alpha$. Направление движущей силы $\vec{F}$ противоположно равнодействующей сил $\vec{N}$ и $m\vec{g}$.

При перемещении груза вверх по наклонной плоскости длиной L работа силы $\vec{F}$ $A = mgsin\alpha L$ положительна, а работа A_1 , совершаемая равнодействующей силой — отрицательна:

$$A = mgsin\alpha L; \quad A_1 = -mgsin\alpha L. \quad (3.62)$$

При падении груза с вершины наклонной плоскости на поверхность земли сила тяжести совершит положительную работу $A_2 = mgh$. Чтобы вернуть тело в исходную точку, его можно переместить по горизонтальной поверхности влево до начала наклонной плоскости. Работа силы тяжести при этом перемещении равна нулю, поскольку перемещение происходит в направлении, перпендикулярном силе $m\vec{g}$. Значит, при перемещении по замкнутому контуру работа совершалась на двух участках, одна — силами системы, вторая — против них. Чтобы найти работу A_0 силы тяжести по всему замкнутому пути, эти работы нужно сложить:

$$A_0 = A_1 + A_2 = -mgLsin\alpha + mgh. \quad (3.63)$$

Очевидно, что сумма будет равна нулю, поскольку, как следует из рис. 3.14,

$$L sin\alpha = h. \quad (3.64)$$

Из рассмотренного примера можно сделать важные выводы:

- *работа силы тяжести не зависит от пути, и её величина определяется только конечной и начальной точками пути. Если начальная и конечная точки совпадают, т.е. перемещение происходит по замкнутому контуру, то работа силы тяжести равна нулю.*
- *простой механизм (наклонная плоскость) даёт выигрыш в силе, но не в работе.*

Поля, в которых работа сил поля не зависит от пути, называются *потенциальными*. Следовательно, поле сил тяжести является потенциальным.

В потенциальных полях можно ввести понятие потенциала и *потенциальной энергии*, которую обозначим буквой W_p . Потенциальная энергия зависит от взаимного расположения тел и определяется силами их взаимодействия. Работа, совершаемая системой или против неё, приводит к изменению потенциальной энергии: работа сил системы производится за счёт убыли её энергии, работа *против* этих сил увеличивает энергию системы. Иначе говоря,

$$dA = -dW_p \quad \text{и} \quad -dA = dW_p, \quad (3.65)$$

где dA — *элементарная работа*; dW_p — бесконечно малое приращение потенциальной энергии.

Как видим, изменение потенциальной энергии происходит лишь тогда, когда система совершает работу, или над системой производят работу внешние силы. *Изменение потенциальной энергии равно работе потенциальной силы, взятой с противоположным знаком.* Равенство (3.65), полученное выше, служит основой для вычисления потенциальной энергии в различных силовых, но потенциальных полях.

3.9. Вычисление потенциальной энергии. Потенциальные кривые

Выше мы убедились, что за потенциальную энергию ответственны силы, действующие внутри системы. Вычисление энергии сводится к вычислению работы соответствующих сил, что подробно рассмотрено нами в предыдущем параграфе. Остановимся на некоторых деталях, характерных только для расчёта потенциальной энергии.

Вычислим сначала потенциальную энергию сжатой пружины. Основой расчёта служит равенство (3.65), Пусть в исходной позиции пружина не запасла энергии, т.е. не была сжата или растянута. Деформация её на величину x связана с *действием внешних сил, которые увеличивают энергию пружины*. Приращение энергии – положительно. Используя (3.54) и (3.65), получаем

$$dA = -kxdx; \quad dW_p = kxdx \quad (3.66)$$

Проинтегрировав это выражение в соответствующих пределах, получим формулу для расчёта потенциальной энергии пружины:

$$\int_0^{W_p} dW_p = \int_0^x kxdx; \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_p = \frac{kx^2}{2}}. \quad (3.67)$$

При вычислении потенциальной энергии сил всемирного тяготения ситуация несколько иная. Логично принять потенциальную энергию гравитационного взаимодействия равной нулю там, где сила взаимодействия (3.2) стремится к нулю, то есть при бесконечно большом расстоянии между телами. Пусть это положение будет исходной позицией тел. Их сближение может происходить под действием *внутренних сил системы*, работа которых будет *положительной*, что соответствует *уменьшению* потенциальной энергии тел. Воспользовавшись выражением (3.65), получим

$$-dW_p = dA \quad \text{и} \quad -dW_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr. \quad (3.68)$$

Интегрируя в пределах от ∞ до r , получаем выражение для расчёта потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух тел:

$$\int_0^{W_p} dW_p = \int_{\infty}^r \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr \quad \text{и} \quad \boxed{W_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}}. \quad (3.69)$$

Знак минус появился здесь в результате интегрирования. Энергия сил *гравитационного притяжения оказывается отрицательной*.

Теперь рассмотрим последний, самый простой пример: найдём энергию тела, поднятого над поверхностью Земли на высоту H . Вновь выберем то положение тела, в котором его потенциальная энергия равна нулю. Очевидно, это будет положение на поверхности земли, при $H = 0$. Чтобы поднять тело, внешние по отношению к системе силы должны совершить положительную работу. При этом работа силы тяжести будет отрицательной (см. выражение (3.57), а изменение потенциальной энергии — положительным:

$$dW_p = -dA = mgdh \quad (3.70)$$

Интегрируя в указанных выше пределах от 0 до H , получаем

$$\int_0^{W_p} dW_p = \int_0^H mg dh \quad \text{и} \quad W_p = mgH. \quad (3.71)$$

Вы уже поняли, что условия во всех приведённых выше примерах выбирают так, чтобы в исходном положении энергия тела была равна нулю. Тогда нижний предел интеграла равен нулю, и мы вычисляем энергию, а не её разность.

Сделаем ещё одно существенное замечание. Вычисляя потенциальную энергию сил гравитационного притяжения, мы убедились, что она отрицательна. Этот вывод распространяется на все силы взаимного *притяжения*. В случае сил *отталкивания* потенциальная энергия взаимодействия *положительна*, если потенциальная энергия принимается равной нулю на бесконечно большом расстоянии между отталкивающимися телами. Действительно, разведённые на бесконечность отталкивающиеся тела могут сблизиться только за счёт работы *внешних* сил. При этом потенциальная энергия их взаимодействия возрастает.

Если же между телами действует сила притяжения, то работа по их сближению производится *внутренними* силами системы, и потенциальная энергия системы уменьшается. Природа этих сил не имеет значения. Это могут быть силы электростатического или ядерного притяжения. Учёт знака потенциальной энергии приобретает особое значение в атомной и ядерной физике.

Графики зависимости потенциальной энергии от координаты носят название *потенциальных кривых*. Они могут иметь разную форму в зависимости от характера тех изменений, которые происходят с энергией при перемещении тела. На рис. 3.15 представлены две потенциальные кривые: нижняя для сил притяжения по формуле (3.69), верхняя — для сил отталкивания, например, в случае двух одноимённых точечных зарядов.

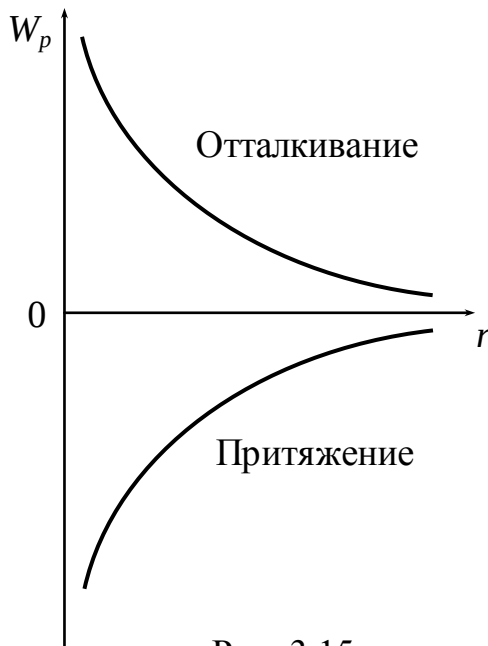


Рис. 3.15

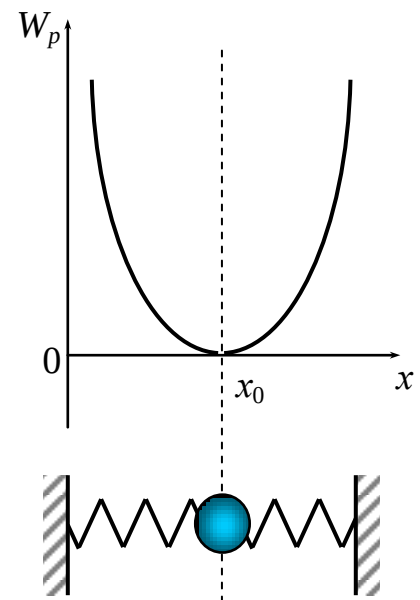


Рис. 3.16

Рассмотрим движение шарика между двумя пружинами (рис. 3.16). Его потенциальная энергия равна нулю в точке с координатой x_0 , когда пружины не де-

формированы. При смещении шарика в любую сторону потенциальная энергия начинает возрастать. Её зависимость (3,67) от координаты x дана на том же рисунке. Потенциальная кривая имеет минимум в точке $x = x_0$.

Потенциальные кривые, имеющие минимум, называют *потенциальными ямами*. Величину энергии, которую следует сообщить телу, чтобы вывести его за пределы ямы, называют *глубиной потенциальной ямы*.

В приведённом примере глубина потенциальной ямы равна той энергии, которую нужно сообщить телу, чтобы разрушить связи, удерживающие шарик. Представленная на рис. 3.16 параболическая форма потенциальной ямы характерна и для атома, находящегося в узле кристаллической решетки. Естественно ожидать, что потенциальные ямы, так же как и потенциальные кривые, могут иметь разнообразную форму в зависимости от характера взаимодействия.

3.9. Кинетическая энергия. Закон сохранения энергии

В механике различают два вида энергии – *кинетическую* и *потенциальную*. Кинетическая энергия W_k – это энергия движущегося тела. Движущееся тело совершает работу, если уменьшается его скорость. Наоборот – для увеличения скорости тела необходимо совершить работу. Изменение кинетической энергии равно работе внешних сил:

$$dW_k = dA = \vec{F} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r}. \quad (3.72)$$

Уравнение записано для случая постоянной массы. Если масса изменяется, её нельзя выносить за знак дифференциала, как это сделано выше. Вводя вместо $d\vec{r}/dt$ скорость и интегрируя в пределах, соответствующих переходу из состояния покоя к движению со скоростью v , получаем

$$\int_0^{W_k} dW_k = \int_0^v m v dv; \Rightarrow \boxed{W_k = \frac{mv^2}{2}}. \quad (3.73)$$

Полученное выражение используется лишь в классической механике. В теории относительности масса зависит от скорости, поэтому в выражении (3.72) её необходимо внести под знак дифференциала:

$$dW_k = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \vec{r}. \quad (3.74)$$

Если тело вращается, его кинетическая энергия вычисляется аналогично, с той лишь разницей, что для вычисления работы используется выражение (3.58):

$$W_2 - W_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I \frac{d\omega}{dt} d\varphi. \quad (3.75)$$

Интегрируя в пределах, соответствующих переходу из состояния покоя в состояние вращения с угловой скоростью ω , получаем

$$\int_0^{W_k} dW_k = \int_0^{\omega} I \omega d\omega; \Rightarrow \boxed{W_k = \frac{I\omega^2}{2}}, \quad (3.76)$$

то есть кинетическая энергия и вращающегося, и поступательно движущегося тела (3.73) прямо пропорциональна его инертности и квадрату скорости. Если центр тяжести тела перемещается со скоростью v и при этом тело вращается с угловой скоростью ω (например, при качении колеса), то его кинетическая энергия равна сумме энергий поступательного и вращательного движений:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (3.77)$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий тела называется его *полной механической энергией*:

$$W = W_k + W_p. \quad (3.78)$$

Опыт показывает, что в природе при любых процессах всегда выполняется *закон сохранения энергии*. Согласно этому закону *полная энергия изолированной системы есть величина постоянная*. Под полной энергией здесь понимается не только механическая (3.78), но и *внутренняя энергия* системы. Изменить энергию системы можно, если система не изолирована. В случае, когда работа производится внешними силами, энергия системы возрастает. Наоборот, если работу совершают внутренние силы системы, то её полная энергия уменьшается.

3.9. Космические скорости. Невесомость

Для тел, движущихся в нашей Солнечной системе, вводят три космических скорости. Две из них связаны с движением тел в поле тяжести конкретной планеты, а третья — с движением тел в поле тяжести Солнца. Аналогичная классификация космических скоростей имеет место и для других звёздных систем. Ниже мы дадим определение каждой из скоростей и рассмотрим, как они рассчитываются.

Первой космической скоростью называют минимальную скорость, которую должно получить тело вблизи поверхности любого небесного тела массы M , например, планеты, для того, чтобы стать *спутником* этого небесного тела. Понятно, что спутник движется по орбите, не покидая сферу влияния того небесного тела, спутником которого является. Форма орбиты в общем случае — эллипс. При движении по орбите на спутник массой m действует всего лишь одна сила — гравитационная сила взаимодействия с небесным телом. Если орбита представляет собой окружность радиусом r , то спутник движется по ней с постоянной скоростью и имеет лишь нормальное ускорение, которое ему сообщает гравитационная сила, направленная к центру планеты (см. рис. 3.12).

Из второго закона Ньютона

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (3.79)$$

можно найти скорость спутника на круговой орбите

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}. \quad (3.80)$$

Под r здесь следует понимать радиус орбиты спутника, равный сумме радиуса R планеты и высоты h спутника над её поверхностью. При $h \ll R$ высотой можно пренебречь и определить скорость спутника на «нулевой» высоте. Это и будет первая космическая скорость. Расчёты показывают, что для Земли первая космическая скорость составляет около 8 км/с, для Луны — 1,7 км/с, для Марса — 5 км/с.

Заметим, что для запуска спутника Земли ему нужно сообщить первую космическую скорость, направленную *по касательной* к круговой траектории. При скорости, большей первой космической, траектория будет представлять собой эллипс, один из фокусов которого находится в центре тяготения, то есть, в центре Земли.

Здесь уместно коснуться ещё одного момента: хорошо известно, что движущиеся по орбите тела находятся в состоянии невесомости, тогда как действующая на них сила притяжения со стороны планеты не равна нулю (от гравитации нет защиты!). Почему же предметы, находящиеся на орбитальной станции, не прижимаются к той стенке, которая обращена к Земле? Чтобы понять это, вспомним, что *вес $\vec{P}$ — это сила, с которой тело действует на опору или растягивает подвес*. В силу третьего закона Ньютона опора действует на тело с такой же по величине силой, направленной противоположно весу. Как известно, эта сила называется нормальной реакцией опоры $\vec{N}$. Следовательно, $\vec{P} = -\vec{N}$, а их модули одинаковы: $P = N$.

Рассмотрим движение системы двух тел (рис. 3.17), находящихся вблизи поверхности Земли («человек в лифте»). В инерциальной системе отсчёта, связанной с Землёй, второй закон Ньютона для тела массой m запишется так:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}. \quad (3.81)$$

Отсюда вес тела

$$\vec{P} = -\vec{N} = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a}). \quad (3.82)$$

Следовательно, если ускорение лифта равно нулю (лифт стоит или движется равномерно), то вес тела равен силе тяжести

$$\vec{P} = m\vec{g}. \quad (3.83)$$

Если лифт свободно падает с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$, то вес тела (3.82) равен нулю, и оно, следовательно, находится в состоянии невесомости.

Значит, *невесомость наступает при свободном падении* тела. На орбите это условие выполняется во время всего движения спутника. Действительно, сократив массы в законе Ньютона (3.79), получим:

$$\gamma \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r} = a_n, \quad (3.84)$$

то есть нормальное ускорение тела на орбите равно ускорению свободного падения (см. выражение (3.8)).

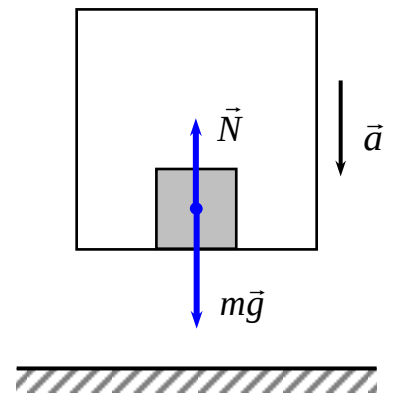


Рис. 3.17

Поскольку нормальное ускорение всегда направлено к центру круговой траектории, спутник на орбите как бы всё время падает с ускорением g на Землю, и поэтому реакция опоры N для спутника и всех находящихся в нём тел всегда равна нулю.

Добавим ещё, что уравнение (3.84) получено при условии равенства инертной и тяготеющей масс. Поэтому невесомость на орбите есть непосредственное следствие этого равенства.

Вторая космическая скорость v_{2k} — это минимальная скорость, необходимая для преодоления земного притяжения (или притяжения любой планеты). При этом начальная кинетическая энергия удаляющегося тела должна пойти на совершение работы против гравитационной силы при перемещении тела с поверхности планеты ($r_1 = R$) в бесконечность ($r_2 = \rightarrow \infty$), то есть на расстояние, где гравитационная сила обращается в нуль:

$$\frac{mv_{2k}^2}{2} = A = \int_R^{\infty} \gamma \frac{mM}{r^2} dr, \quad (3.85)$$

где R — радиус планеты. Выполнив интегрирование, получим:

$$\frac{mv_{2k}^2}{2} = \gamma \frac{mM}{R}, \quad \text{и} \quad v_{2k} = \sqrt{2\gamma \frac{M}{R}}. \quad (3.86)$$

Сравнивая формулы (3.80) и (3.86), видим, что вторая космическая скорость больше первой в $\sqrt{2}$ раз.

Величина скорости, которую сообщают телу у поверхности Земли, определяет форму траектории. Если скорость запуска больше первой и меньше второй космической, то траектория будет замкнутой — более или менее вытянутый эллипс. При превышении второй космической скорости тело будет двигаться по параболической траектории.

Третья космическая скорость v_{3k} — это минимальная скорость, необходимая телу, чтобы преодолеть притяжение Солнца и покинуть Солнечную систему. В этом случае последние уравнения сохраняют свою силу. Только под M теперь следует понимать массу Солнца, а R есть расстояние от Солнца до Земли.

Найдём третью космическую скорость для тела, запускаемого с орбиты Земли, используя закон сохранения полной механической энергии тела. Согласно ему, сумма кинетической и потенциальной энергий тела в точке старта равна сумме тех же энергий на бесконечно большом расстоянии от Солнца:

$$\frac{mv_{3k}^2}{2} + \left(-\gamma \frac{mM_c}{R_{orb}} \right) = \frac{mv_{\infty}^2}{2} - \gamma \frac{mM}{\infty}. \quad (3.87)$$

Полагая скорость тела на ∞ равной нулю, получаем для третьей космической скорости:

$$v_{3k} = \sqrt{2\gamma \frac{M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{1,5 \cdot 10^{11}}} \approx 4,2 \cdot 10^4 \frac{M}{c} \approx 42 \text{ км/с}. \quad (3.88)$$

4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.1. Кинематика гармонических колебаний

Отличительной чертой колебательного движения является его повторяемость. Если состояние тела повторяется через равные промежутки времени, то такие колебания называются *периодическими*. Длительность одного полного колебания называется *периодом* T колебаний. При колебательном движении путь s , пройденный телом, всё время увеличивается, а координата x тела периодически то уменьшается, то увеличивается.

На рис. 4.1 изображены три положения тела, прикреплённого к свободному концу вертикально подвешенной пружины: в состоянии равновесия ($x = 0$), и в двух крайних положениях — наибольшей деформации ($x = x_m$), и наименьшей деформации ($x = -x_m$) пружины. Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) отклонение тела от положения равновесия было максимальным, то есть тело было оттянуто вниз на величину $x_0 = x_m$ от положения равновесия, в котором растяжение пружины определяется только массой тела и жёсткостью пружины, а затем отпущено одновременно с включением секундомера. Под действием силы упругости величина смещения начнёт уменьшаться до $x = 0$ и затем по инерции возрастать в сторону отрицательных значений до $x = -x_m$ (растяжение пружины становится меньше, чем в положении равновесия тела). На это перемещение от $x = x_m$ до $x = -x_m$ затрачивается время, равное половине периода колебаний. Затем процесс идёт в обратном направлении и через полпериода тело возвращается в исходное состояние, и так далее. Максимальное смещение x_m тела от положения равновесия называют *амплитудой*, поэтому x_m часто обозначают буквой A .

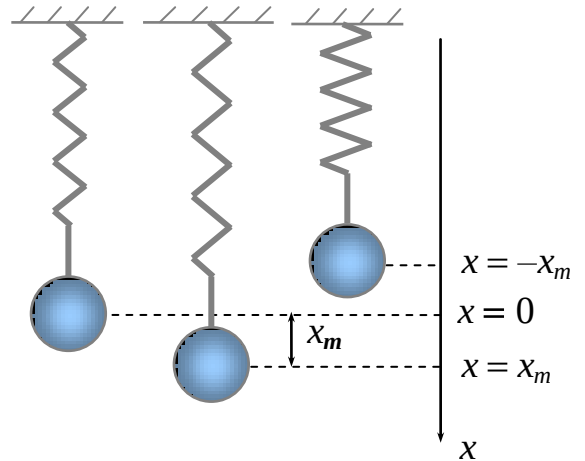


Рис. 4.1

Для выражения зависимости смещения x от времени t в рассмотренном нами случае удобнее всего применить функцию косинуса, введя постоянную ω , которая должна иметь размерность с^{-1} , чтобы под знаком косинуса стояла безразмерная величина:

$$x(t) = A \cos \omega t. \quad (4.1)$$

Если в начальный момент времени маятник находится в положении равновесия ($x_0 = 0$), то наиболее подходящей функцией будет синус. В общем же виде пользуются формулой, содержащей некоторый параметр φ_0 :

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (4.2)$$

В этом случае при $t = 0$ тело может находиться в любой промежуточной точке. Придавая разные значения φ_0 , можно приспособлять выражение (4.2) к конкретным начальным условиям колебания. Очевидно, что наибольшее значение

смещения в формулах (4.1) и (4.2) будет равно амплитуде A , поскольку максимальное значение синуса и косинуса равно единице.

Выясним смысл параметра ω , воспользовавшись выражением (4.1). Очевидно, что смещение повторяется через определённые промежутки времени. Напомним, что *периодом* T называется время одного полного колебания. Через каждые T секунд тело возвращается в прежнее положение, то есть x принимает такое же значение, что и T секунд назад:

$$x_1 = A \cos \omega t = A \cos \omega(t + T), \quad (4.3)$$

следовательно,

$$\cos \omega t = \cos \omega(t + T). \quad (4.4)$$

Поскольку значение косинуса повторяется при изменении угла на 2π , то $\omega(t+T) - \omega t = 2\pi$ и

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.5)$$

Постоянная ω , введённая в (4.1), оказывается связанной с периодом колебаний и называется *циклической частотой*.

Выражение, от которого берётся косинус или синус в уравнениях (4.1) и (4.2), называют *фазой колебаний*. Фаза гармонических колебаний является линейной функцией времени: $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$. Фаза определяет состояние колеблющегося тела в конкретный момент времени, поскольку от неё зависят и смещение, и скорость и ускорение колеблющегося тела. Конечно, фаза — величина безразмерная, единица измерения фазы в СИ — радиан. Величина φ_0 в уравнении колебаний (4.2) называется *начальной фазой*, то есть фазой колебаний для момента времени $t = 0$.

Таким образом, описывая колебательное движение, мы можем пользоваться любой периодической функцией, введя в уравнение колебаний три постоянные величины: амплитуду A , начальную фазу φ_0 и циклическую частоту ω , которые называются *параметрами* колебаний. При постоянных параметрах смещение из положения равновесия остаётся функцией только одной переменной — времени t .

Скорость колеблющегося тела, а точнее, проекция v_x скорости на ось x , равна первой производной от смещения, а ускорение — это вторая производная:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = -A\omega \cos(\omega t + \varphi_0); \\ a_x &= \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Нетрудно показать, что ускорение будет отрицательным (по отношению к смещению) и в случае, если движение описывается уравнением (4.2). Смысл этого понятен: ускорение всегда направлено в сторону, противоположную смещению, то есть к положению равновесия тела, и это является отличительным признаком колебательного движения.

Следует заметить, что колебательное движение не будет равноускоренным, так как ускорение не постоянно, а зависит от времени. График зависимости ускорения от времени $a_x(t)$ будет синусоидой, так же как и график зависимости смещения от времени $x(t)$, но со сдвигом фаз, равным π (180°). На рис. 4.2 представ-

лены графики смещения и соответствующих проекций скорости и ускорения для тела, совершающего *гармонические колебания*.

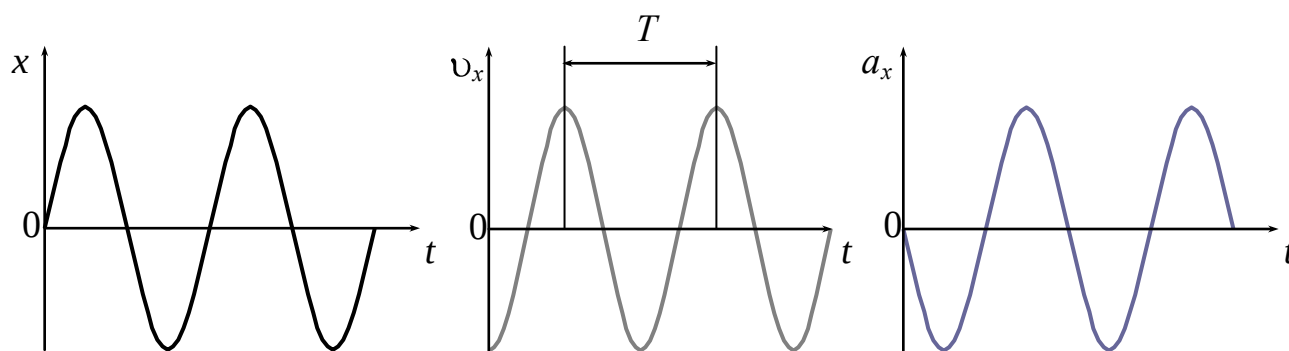


Рис. 4.2

Очень полезно познакомиться и с другим способом изображения колебательного движения — *векторной диаграммой* (рис. 4.3). Вектор $\vec{A}$, длина которого равна амплитуде колебаний и не меняется с течением времени, построен так, что составляет с опорной осью угол $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Опорная ось имеет произвольное направление и не обязательно горизонтальна. Угол φ равен фазе колебания, и смещение x из положения равновесия будет проекцией вектора $\vec{A}$ на опорную ось.

С течением времени фаза φ растёт, значит вектор будет вращаться вокруг своего начала с угловой скоростью ω , и проекции $x = A \cos \varphi$ и $y = A \sin \varphi$ будут при этом периодически меняться. Поскольку угол φ переменный, то для определённости принято строить векторную диаграмму для начального момента времени $t = 0$. Тогда угол между опорной осью и вектором амплитуды будет равен начальной фазе колебаний, то есть $\varphi = \varphi_0$. Изложенный выше геометрический способ представления колебаний иногда очень удобен, например, при сложении одинаково направленных колебаний.

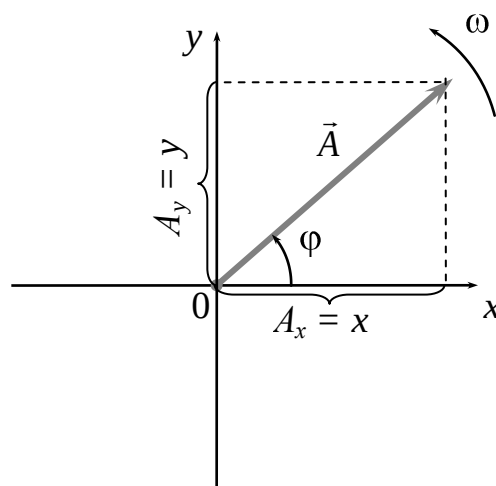


Рис. 4.3

4.2. Динамика колебаний материальной точки.

Собственная частота колебаний

Основной закон динамики — второй закон Ньютона — остаётся, конечно, таковым и для колебательного движения. Его запись, правда, имеет некоторые особенности, учитывающие то, что ускорение тела при колебаниях всегда направлено к положению равновесия. Значит, к положению равновесия, противоположно смещению, будет направлена и сумма всех сил, действующих на колеблющееся

тело. Для начала заменим ускорение в правой части этого закона (3.10) в соответствии с выражением (4.6), полагая массу m колеблющегося тела постоянной:

$$F_x = ma_x = -m\omega^2 x. \quad (4.7)$$

Произведение массы колеблющегося тела на квадрат частоты при гармонических колебаниях ($\omega = \text{const}$) также будет величиной постоянной. Обозначим это произведение буквой k и назовём *коэффициентом жёсткости*:

$$k = m\omega_0^2. \quad (4.8)$$

Коэффициент k зависит от конструкции самой колеблющейся системы и, наряду с массой, определяет частоту ω_0 собственных колебаний системы. Эта частота зависит только от параметров системы и называется *собственной частотой*. Соответственно и период собственных колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$ (см. выражение (4.5)), определяется параметрами колеблющейся системы и не зависит от каких либо внешних факторов. Чтобы подчеркнуть этот момент, частоте, входящей в уравнение (4.8), присвоен индекс «0». Ниже будут рассмотрены случаи, в которых систему вынуждают колебаться с иной частотой. Но, будучи предоставленной самой себе, система всегда колеблется с частотой ω_0 , которая не зависит от того, какова амплитуда этих колебаний. Убедитесь в этом сами: колеблющееся тело может иметь как малую, так и большую амплитуду колебаний. При большой амплитуде тело движется с большой скоростью (см. формулу (4.6)). При малой амплитуде скорость тела невелика, так как за то же время, определяемое периодом, оно проходит меньшее расстояние.

Воспользовавшись понятием коэффициента жёсткости, можно изменить вид уравнения (4.7):

$$-kx = ma_x. \quad (4.9)$$

Левая часть уравнения имеет размерность силы и по своей зависимости от x подобна упругой силе: *направлена против смещения x от положения равновесия, а её величина прямо пропорциональна смещению*. Это, как правило, не одна сила, а сумма всех сил, действующих на колеблющееся тело. Её часто называют *квазиупругой силой*. Выражение (4.9) и есть второй закон Ньютона для колебаний. Он даёт возможность вычислить период собственных колебаний любой системы.

Рассмотрим в качестве примеров два маятника: *математический* и *физический* (рис. 4.4) и, применив основной закон динамики, найдём их периоды колебаний.

Математический маятник. Это материальная точка массой m , подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити длиной l (рис. 4.4а). В реальности – небольшое тело на лёгкой и достаточно длинной нити. Нетрудно показать силы, действующие на тело. Их будет две – сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{F}_n$. Движение колеблющегося тела – переменное, и ускорение тела направлено к положению равновесия. Значит, туда же будет направлена и сумма $\vec{F}$ этих двух сил. При малом (по сравнению с длиной нити) смещении x из положения равновесия отношение «катета» x к «гипотенузе» l будет приблизительно равно отношению возвращающей силы F к силе тяжести mg :

$$\frac{x}{l} = \frac{F}{mg}, \text{ и возвращающая сила } F = \frac{mg}{l} x. \quad (4.10)$$

Величина возвращающей силы оказывается пропорциональной смещению x , и коэффициент пропорциональности $k = mg/l$. Заменяя k в законе Ньютона (4.9), получаем:

$$-\frac{mg}{l} x = ma_x, \quad (4.11)$$

или, подставляя вместо ускорения его значение по (4.6),

$$-\frac{mg}{l} x = -m\omega^2 x. \quad (4.12)$$

Сокращая x и m , получаем уравнение $\omega^2 = g/l$, из которого легко получить известную *формулу Гюйгенса* для периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.13)$$

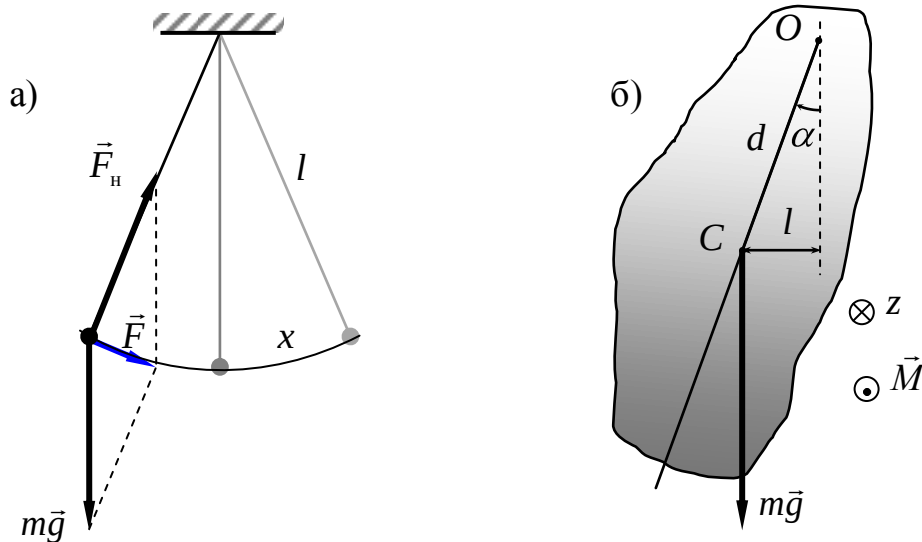


Рис. 4.4

Физический маятник. Так называют любое тело, которое может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси, *не проходящей через центр тяжести* этого тела (см. рис. 4.4б).

Если это тело отклонить от положения равновесия на небольшой угол α и затем отпустить, то оно начнёт совершать почти гармонические колебания, период которых зависит от расстояния d между осью O и центром тяжести C .

В точке C приложена сила тяжести $m\vec{g}$, которая создаёт вращающий момент $\vec{M}$, стремящийся вернуть тело в положение равновесия. Как видно из рисунка, плечо этой силы $l = d \sin \alpha$. При малых углах $\sin \alpha \approx \alpha$ (1-й замечательный предел!), и величина момента силы тяжести прямо пропорциональна углу отклонения от положения равновесия: $M \approx mgd\alpha$.

Запишем основной закон динамики вращательного движения (3.43) в проекции на ось z (см. рис. 4.4б), с учётом противоположных направлений угла отклонения и момента силы:

$$-mgd\alpha = I\epsilon, \quad \text{или} \quad -mgd\alpha = I\ddot{\alpha}, \quad (4.14)$$

где I — момент инерции тела относительно оси O ; ϵ — угловое ускорение тела, равное второй производной от угла поворота α .

Произведя замену $\ddot{\alpha} = -\omega^2\alpha$, получим из (4.14) формулы для угловой частоты и периода колебаний физического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}. \quad (4.15)$$

Нетрудно показать, что период колебаний математического маятника получится из формулы (4.15), если подставить в неё момент инерции материальной точки $I = ml^2$ и расстояние от точки подвеса до центра тяжести системы $d = l$.

4.3. Энергия колебаний

Вопрос об энергии колеблющейся материальной точки решается весьма просто: любое колеблющееся тело обладает *кинетической* энергией, так как оно движется, и *потенциальной* энергией, так как внутри колеблющейся системы действуют квазиупругие силы. Если считать, что колебания задаются уравнением (4.2), то кинетическая и потенциальная энергии тела массой m , колеблющегося, например, на пружине с жёсткостью k , будут определяться следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0); \\ W_p &= \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Полная энергия W колеблющегося тела равна сумме кинетической W_k и потенциальной W_p энергий. Используя связь между k и ω (4.8), легко показать, что *полная энергия колебаний прямо пропорциональна квадрату амплитуды колебаний и не зависит от времени*:

$$W = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \quad (4.17)$$

Первая дробь в этих равенствах — это наибольшая потенциальная энергия, вторая дробь — наибольшая кинетическая. Текущие значения W_p и W_k являются положительными периодическими функциями времени (4.15), но их сумма остаётся постоянной величиной. Потенциальная и кинетическая энергии при колебательном движении изменяются с частотой, которая в два раза больше частоты колебаний ($\omega_w = 2\omega$), причём в противоположных фазах: когда кинетическая энергия максимальна, потенциальная равна нулю, и наоборот. Кинетическая энергия максимальна в момент прохождения телом положения равновесия, потенциальная — при наибольшем отклонении от него.

Гармонические колебания являются прекрасным примером закона сохранения энергии: *если в замкнутой системе действуют только квазиупругие силы, то полная механическая энергия этой является постоянной величиной*. Поскольку здесь вся потенциальная энергия переходит в кинетическую и наоборот, то их максимальные значения одинаковы: $(W_p)_{\max} = (W_k)_{\max}$ и пропорциональны квадрату амплитуды. Если энергия колебаний не убывает, не рассеивается, их амплитуда остаётся неизменной. Иначе обстоит дело в системе, где наряду с упругими силами действуют также силы трения (сопротивления среды).

4.4. Затухающие колебания

В уравнении (4.9) второго закона Ньютона суммой всех сил является квазиупругая сила, без которой колебания невозможны. Если же на тело действует ещё и сила трения (а она действует практически всегда), её следует учитывать. Сила сопротивления среды, как известно, всегда направлена в сторону, противоположную скорости, и её величина, при медленном движении, пропорциональна скорости тела:

$$F_{mp} = r v, \quad (4.18)$$

где r — коэффициент сопротивления среды.

С учетом этой силы второй закон Ньютона для тела массой m , колеблющегося вдоль оси OX , в проекции на эту ось примет вид:

$$-kx - r v_x = m a_x. \quad (4.19)$$

Работа сил трения приводит к убыли энергии колеблющегося тела:

$$F_{mp} dx = -dW. \quad (4.20)$$

Уравнение (4.20) имеет тот недостаток, что не содержит времени, хотя очевидно, что убыль энергии пропорциональна времени. Введём его, выразив бесконечно малое приращение координаты из определения проекции скорости:

$$dx = v_x dt. \quad (4.21)$$

Тогда, с учетом (4.18), из выражения (4.20) получим:

$$r v^2 dt = -dW. \quad (4.22)$$

Опыт показывает, что затухание — убыль энергии колеблющегося тела — зависит от его массы. Более инертное тело, то есть тело с большей массой дольше останавливается, энергия его убывает медленно. Введя в (4.22) массу, получим:

$$\frac{2r}{m} \cdot \frac{m v^2}{2} dt = -dW. \quad (4.23)$$

Поскольку при колебательном движении полная энергия может быть представлена как две кинетических, то

$$\frac{r}{m} W dt = -dW, \quad (4.24)$$

и после интегрирования в пределах от 0 до t и от W_0 до W получим

$$W = W_0 e^{-\frac{r}{m} t}. \quad (4.25)$$

Заменив полную энергию по (4.17) через $kA^2/2$, после сокращения и извлечения корня получим выражение для амплитуды затухающих колебаний:

$$A = A_0 e^{-\frac{r}{2m}t}. \quad (4.26)$$

Величину $\frac{r}{2m} = \beta$ называют *коэффициентом затухания*.

Уравнение (4.26) свидетельствует, что амплитуда колебаний убывает, асимптотически приближаясь к оси времени (рис. 4.5). Отношение двух амплитуд, взятых через период, носит название *декремента затухания*. Найдём его, записав значения амплитуд:

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t}; \quad A_2 = A_0 e^{-\beta(t+T)}. \quad (4.27)$$

В приведённых выше уравнениях индексом ноль помечена амплитуда на момент начала колебаний. Поделив уравнения (4.27) одно на другое, получим:

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{-\beta T}. \quad (4.28)$$

Прологарифмировав последнее выражение, найдём логарифмический декремент затухания:

$$\kappa = \ln \frac{A_1}{A_2} = \beta T. \quad (4.29)$$

В уравнении (4.28) определяется декремент затухания, а в (4.29) – его логарифм κ ("каппа"). Этот логарифм носит название *логарифмического декремента*. Он связан с периодом колебания через коэффициент затухания и является характеристикой затухающего колебания, оставаясь постоянным в течение всего колебательного процесса.

Подводя итог, заметим, что *уравнение затухающих колебаний* записывается в привычном для нас виде периодической функции смещения от времени $x(t)$, но амплитуда колебаний уменьшается с течением времени по полученному выше закону (4.26):

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (4.30)$$

4.5. Вынужденные колебания

Реальные колебания можно сделать незатухающими, если компенсировать потери, то есть в процессе колебаний подводить к колеблющемуся телу энергию. Это можно делать двумя способами.

1) *Подводить энергию с помощью постоянной силы.*

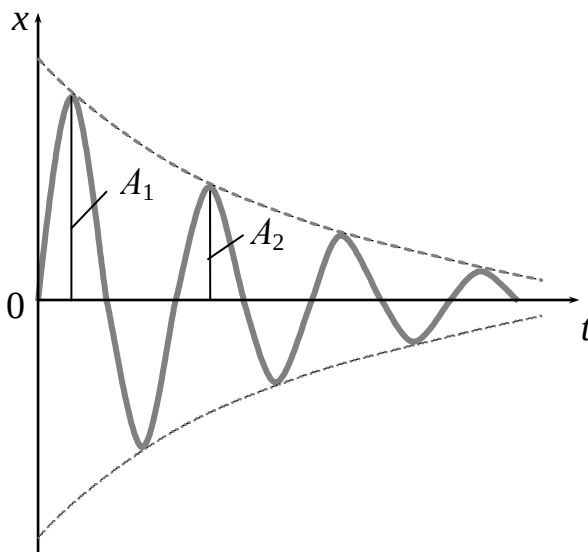


Рис. 4.5

Возникающие при этом колебания носят название *автоколебаний*. Такими будут, например, колебания скрипичной струны под действием смычка, волны на поверхности воды при ветре и др. Примерами автоколебательной системы могут служить часовые механизмы и колебательные контуры в радиопередатчиках. Основной закон динамики в случае одномерных автоколебаний можно представить в виде:

$$-kx - r v_x + F = m a_x, \text{ где } F = \text{const.} \quad (4.31)$$

2) Подводить энергию за счет переменной силы, которая изменяется по гармоническому закону:

$$F_x = F_m \sin \omega t, \quad (4.32)$$

где F_m — амплитуда вынуждающей силы.

Уравнение показывает, что частота изменения вынуждающей силы есть ω . Эта частота совершенно не обязательно должна совпадать с собственной частотой ω_0 колебаний системы.

Интересен вопрос, при каком соотношении между ω и ω_0 колебания будут происходить с наибольшей амплитудой. Для ответа на этот вопрос предположим априори, что под воздействием внешней периодической силы тело будет колебаться не с частотой ω_0 , а с частотой вынуждающей силы — ω , причём фаза этих вынужденных колебаний отстает от фазы вынуждающей силы на φ_0 :

$$x = x_m \sin(\omega t - \varphi_0). \quad (4.33)$$

Динамическое уравнение вынужденных колебаний в проекции на ось, вдоль которой происходят колебания, запишется так:

$$-kx - r v_x + F_m \sin \omega t = m a_x. \quad (4.34)$$

Заменяя x по (4.32), а ускорение и скорость — соответствующими производными этой функции, получим:

$$-k x_m \sin \varphi - r \omega x_m \cos \varphi + F_m \sin \omega t = -m \omega^2 x_m \sin \varphi, \quad (4.35)$$

где буквой $\varphi = (\omega t - \varphi_0)$ обозначена фаза колебаний.

Оставляя вынуждающую силу в левой части уравнения и перенося всё остальное в правую часть, будем иметь:

$$F_m \sin \omega t = k x_m \sin \varphi + r \omega x_m \cos \varphi - m \omega^2 x_m \sin \varphi. \quad (4.36)$$

Последнее уравнение может служить основанием для построения *векторной диаграммы*, у которой опорная ось совпадает с вынуждающей силой.

Откладывая сначала амплитуду квазиупругой силы kx_m , запаздывающей по отношению к вынуждающей силе на угол φ_0 , затем амплитуду силы трения ($r m \omega^2 x_m$), сдвинутую по фазе относительно смещения на $\pi/2$, и, наконец, амплитуду произведения массы на ускорение ($m \omega^2 x_m$), которая противоположна смещению, получим векторную диаграмму, на которой изображены четыре вектора (рис. 4.6).

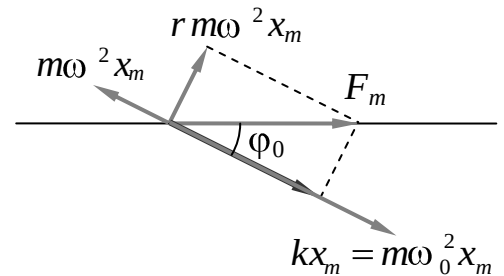


Рис. 4.6

Сложение векторов следует начинать с двух

противоположных друг другу векторов kx_m и $m\omega^2 x_m$. Их сумма, на векторной диаграмме, выделена жирной стрелкой и равна разности длин этих векторов $m x_m (\omega_0^2 - \omega^2)$. Далее строится прямоугольник, диагональю которого будет F_m , как того требует уравнение (4.36). По теореме Пифагора

$$F_m^2 = [m x_m (\omega_0^2 - \omega^2)]^2 - (r \omega x_m)^2, \quad (4.37)$$

откуда можно найти амплитуду вынужденных колебаний:

$$x_m = \frac{F_m}{\sqrt{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - r^2 \omega^2}}. \quad (4.38)$$

Из полученного равенства следует, что амплитуда вынужденных колебаний имеет наибольшее значение при $\omega = \omega_0$, то есть когда частота вынуждающей силы равна частоте собственных колебаний системы.

Явление резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частот носит название *резонанса*, а график зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты (рис. 4.7) называется *резонансной кривой*. Резонансная кривая в зависимости от величины коэффициента сопротивления может быть либо высокой и острой (при малом затухании), либо более полой.

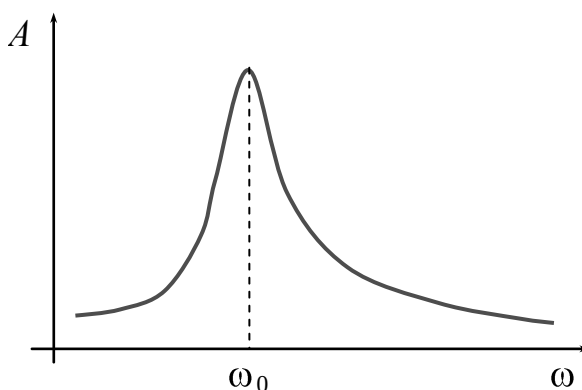


Рис. 4.7

4.6. Сложение колебаний

Вопрос о характере движения тела, участвующего в двух и более колебательных процессах, требует отдельного рассмотрения двух наиболее распространенных случаев: а) сложение одинаково направленных колебаний и б) сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Сложение одинаково направленных колебаний.

В этом случае оба колебания направлены вдоль одной оси, и результирующее смещение будет складываться из смещений колеблющегося тела в каждом из колебаний:

$$x = x_1 + x_2. \quad (4.39)$$

Сложить два колебания — значит найти зависимость результирующего смещения от времени, то есть $x(t)$. Задача проще всего решается с помощью векторной диаграммы (см. рис. 4.3), на которой в виде векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ изображаются составляющие колебания и их сумма $\vec{A}$.

На рис. 4.8 представлена векторная диаграмма для случая, когда складываемые колебания задаются уравнениями

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}); \quad (4.40)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}).$$

Вектор $\vec{A}$ — диагональ параллелограмма — является суммой векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$, и его модуль зависит от разности фаз складываемых колебаний

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_{02} - \varphi_{01}). \quad (4.41)$$

Очевидно, что в общем случае, когда частоты колебаний ω_1 и ω_2 не равны друг другу, угол $\Delta\varphi$ не сохраняется постоянным, поскольку с течением времени векторы амплитуд поворачиваются каждый со своей угловой скоростью:

$$\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{01}; \quad \varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_{02}. \quad (4.42)$$

В результате суммарная амплитуда A будет изменяться со временем от минимального значения ($A_2 - A_1$) до максимального значения ($A_2 + A_1$) с частотой $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, то есть колебания будут негармоническими.

Если же частоты складываемых колебаний одинаковы ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$), разность фаз $\Delta\varphi$ будет постоянна и равна разности начальных фаз:

$$\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01}. \quad (4.43)$$

Амплитуда суммарного колебания тогда остаётся постоянной. Складываемые колебания в этом случае называют *когерентными*. Таким образом, когерентные колебания — это колебания с постоянной, не изменяющейся с течением времени, разностью фаз. Величину амплитуды A результирующих колебаний (см. рис. 4.8) можно найти по теореме косинусов:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}. \quad (4.44)$$

Второй параметр — циклическая частота ω — для случая когерентных колебаний равна частоте складываемых колебаний: действительно, на векторной диаграмме при вращении векторов A_1 и A_2 со скоростью ω с такой же скоростью будет вращаться и вектор суммарной амплитуды, т.е. параллелограмм в целом.

Напомним, что для определённости на диаграмме откладываются не текущие фазы φ_1 и φ_2 , а лишь начальные фазы. Поэтому угол φ_0 — между суммарной амплитудой и опорной осью — есть начальная фаза результирующего колебания. Тангенс этого угла может быть найден из треугольника OBC как отношение его катетов:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{BC}{OC}. \quad (4.45)$$

Легко видеть (см. рис. 4.8), что длины катетов определяются амплитудами и начальными фазами составляющих колебаний: $BC = A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}$; $OC = A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}$.

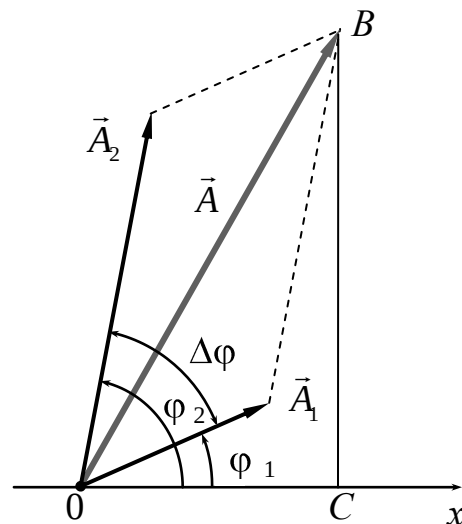


Рис. 4.8

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Сложение двух колебаний в случае, когда они перпендикулярны друг другу, не всегда приводит к колебательному движению. Чаще реализуются случаи, когда тело в результате сложения перпендикулярных колебаний движется по какой-либо кривой. Этой кривой может быть эллипс, окружность, парабола и другие не столь простые геометрические фигуры. Случается, что наложение двух перпендикулярных колебаний приводит и к движению по прямой, т.е. колебательному движению, но в ином направлении, нежели направления складываемых колебаний. Зная их параметры, можно рассчитать траекторию результирующего движения, освободившись от времени t и, следовательно, от тригонометрических функций.

Например, пусть точка участвует в колебаниях по осям OX и OY , причём частоты колебаний *одинаковы*, а их начальные фазы отличаются на 90° :

$$x = A \cos \omega t; \quad y = B \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -B \sin \omega t. \quad (4.46)$$

Поделив x на A , а y на B , возведя в квадрат и сложив эти уравнения, получим уравнение прямого эллипса:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (4.47)$$

При одинаковых амплитудах траекторией тела, участвующего в таких взаимно перпендикулярных колебаниях, будет окружность. Нетрудно также показать, что если разность фаз колебаний по x и y равна 0 или 2π , то траектория точки — прямая линия. Убедитесь в этом сами, приняв $x = A \cos \omega t$; $y = B \cos \omega t$, и получив уравнение траектории $y(x)$. В общем случае, когда $0 < \Delta\varphi < 90^\circ$, точка будет двигаться по эллипсу, наклонённому по отношению к осям координат.

Если точка совершает взаимно перпендикулярные колебания с разными частотами, то её траектория — сложная кривая, вписанная в прямоугольник со сторонами, равными удвоенным амплитудам этих колебаний. При кратных частотах (отношение частот колебаний по осям координат равно целому числу n , например $\omega_y/\omega_x = 2$) траекторией точки будет одна из фигур Лиссажю, которые можно наблюдать на экране осциллографа. Так что эллипс или прямая — это фигуры Лиссажю для $n = 1$. Некоторые из этих фигур изображены на рис. 4.9.

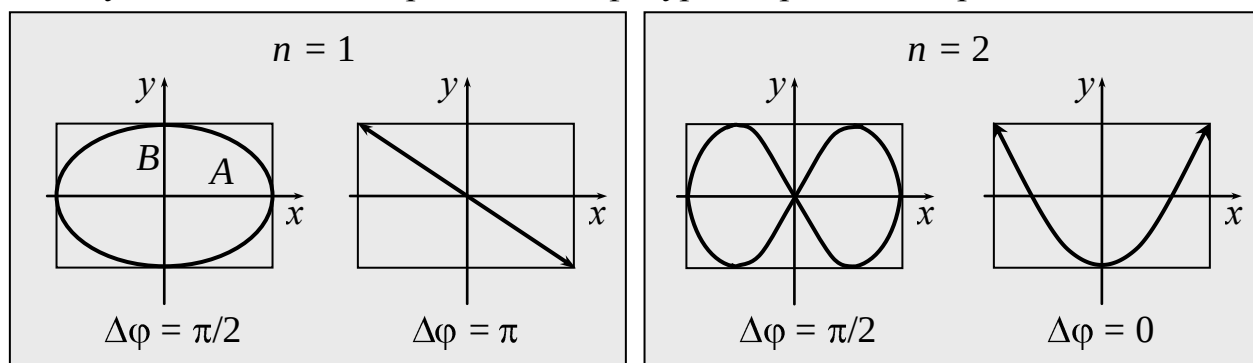


Рис. 4.9

4.7. Волны

Волна – очень распространённый вид движения. Наверняка всем знакомы волны на поверхности воды. Другой пример – колебания частиц воздуха, вызываемые колебаниями голосовых связок, передаются от одной частицы воздуха к другой, и в воздухе распространяется *звуковая волна*. Если волна распространяется от точечного источника в однородной среде, её называют *сферической*, так как в этом случае колебания, переносимые волной, распространяются во все стороны одинаково, и совокупность точек, до которых одновременно дошло колебательное движение, образует сферу, в центре которой находится источник колебания.

Простейший вид волнового движения – это волны, распространяющиеся в одном направлении. Такие волны можно, например, вызвать, если ударить по одному из концов упругого стержня. Колебания дойдут одновременно до точек, лежащих на плоскости, перпендикулярной оси, вдоль которой идет колебание. Волна в этом случае носит название *плоской*. Совокупность же точек, до которых одновременно дошли колебания, носит название *фронта волны*. В первом случае фронт волны – сфера, во втором – плоскость.

Различают также волны *поперечные* и *продольные*. У поперечных волн колебания точек происходят перпендикулярно направлению распространения волны, у продольных волн – вдоль него. Поскольку волна есть распространяющееся колебательное движение, уравнение её можно получить на основе уравнения (4.1), описывающего колебательное движение.

Получим уравнение плоской волны, распространяющейся от источника, совершающего гармонические колебания по закону

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (4.47)$$

Здесь время измеряется от начала колебаний этого источника.

Пусть волна будет плоской, и распространяется вдоль оси l , начало которой совпадает с положением источника колебаний. Как и любой процесс, передача колебательного движения от одной точки к другой требует времени. Следовательно, волна распространяется в среде с определенной скоростью, величину которой мы обозначим буквой c . Поэтому время колебаний точки, находящейся от источника на расстоянии l , будет несколько меньше, чем время t , введённое в уравнение колебаний источника.

Если мы хотим определить смещение от положения равновесия не только самого источника колебаний, но и любой точки на оси l , то в уравнении (4.47) время t следует заменить временем t' колебаний той точки, смещение которой мы хотим рассчитать. Очевидно, что колебания в этой точке начнутся с опозданием на время l/c , тогда

$$t' = t - \frac{l}{c}, \quad (4.48)$$

то есть будет зависеть от того, на каком расстоянии от источника выбрана точка.

Последнее является вполне естественным: чем дальше от источника расположена эта точка, тем больше времени нужно, чтобы колебания дошли до неё.

Уравнение плоской волны, т.е. уравнение колебаний точки с любой координатой l получается из уравнения (4.47) при замене времени t на время t' :

$$x = x_m \cos \left[\omega \left(t - \frac{l}{c} \right) + \varphi_0 \right]. \quad (4.49)$$

Здесь выражение в квадратных скобках, стоящее под знаком косинуса — это *фаза волны*, которая, в отличие от *фазы колебаний*, зависит не только от времени, но и от координаты.

Часто уравнение волны (4.49) записывают несколько иначе, используя понятие длины волны λ . *Длиной волны называют расстояние между двумя ближайшими точками, колеблющимися в одинаковых фазах*. Разность фаз колебаний в этих точках должна быть равна периоду косинуса, то есть 2π , чтобы $x(t, l)$ равнялось $x(t, l + \lambda)$:

$$\left[\omega \left(t - \frac{l}{c} \right) + \varphi_0 \right] - \left[\omega \left(t - \frac{l + \lambda}{c} \right) + \varphi_0 \right] = 2\pi. \quad (4.50)$$

Из этого равенства нетрудно получить выражение, связывающее длину волны с её периодом и скоростью распространения:

$$\lambda = cT, \quad (4.51)$$

то есть длина волны равна расстоянию, которое волна проходит за время, равное периоду.

Заменив угловую частоту в уравнении волны (4.49) через период и введя её в круглые скобки, получим видоизменённое уравнение плоской волны

$$x = x_m \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right], \quad (4.52)$$

в котором параметрами являются период T и длина волны λ .

В отличие от уравнения колебаний в уравнении волны под знаком косинуса содержатся две переменные: время и координата. Смещение x есть периодическая функция и той, и другой величины. Поэтому уравнение волны помимо развёртки колебаний во времени, записанной для точки с координатой l , будет иметь ещё один график — зависимость смещения x от координаты l .

Оба эти графика изображены на рис. 4.10. Верхний соответствует фиксированной координате $l = \text{const}$, нижний — фиксированному времени $t = \text{const}$. В зависимости от того, какая величина отложена по горизонтальной оси, из графика можно найти либо период колебаний T , либо длину волны λ .

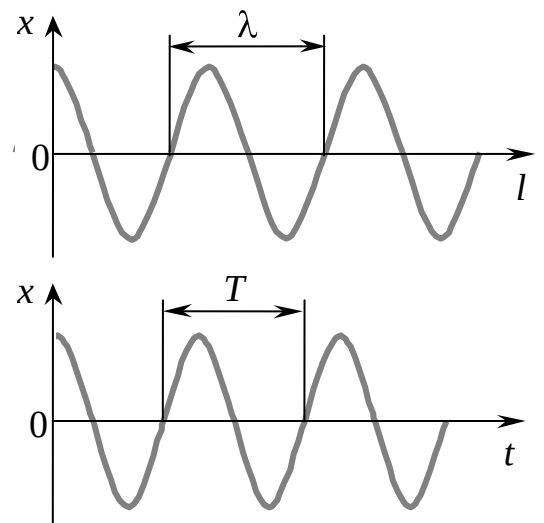


Рис. 4.10

Так же, как и в случае колебательного движения, приведённые выше уравнения (4.50) и (4.52) в строгой теории колебаний называют решением дифференциального *волнового уравнения*. В разделе 4.2 было получено дифференциальное уравнение второго порядка (4.9), как специфическое выражение второго закона Ньютона для случая колебательного движения.

Оно содержит ускорение — вторую производную от смещения x по времени. В случае волнового движения должна добавиться ещё одна производная — по координате l . Поскольку нам уже известно решение уравнения волны, пойдём путём, обратным тому, которым идут в строгой теории: по решению (4.50) найдём вид волнового дифференциального уравнения. Для этого дважды продифференцируем (4.50) по t , а затем по l , сначала считая постоянной координату l , а потом — время t :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\omega^2 x; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial l^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} x. \quad (4.53)$$

Следовательно, умножая на величину $1/c^2$ вторую частную производную от смещения по времени, мы получим вторую производную по координате от этой же величины:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial l^2}. \quad (4.54)$$

Это и есть *волновое уравнение* для плоской волны. Как и следовало ожидать, дифференциальное уравнение волны содержит две производные, а не одну, как в случае колебательного движения.

В качестве примера волнового движения рассмотрим звуковые волны, распространяющиеся в любой упругой среде — в газах, жидкостях, твёрдых телах. Частотный диапазон звуковых колебаний определяется способностью уха воспринимать колебания давления и преобразовывать их в ощущение звука. Человек с нормальным слухом слышит звук, если частота колебаний лежит в диапазоне от 16 Гц до 16 кГц. У детей верхняя граница выше.

Колебания с частотой менее 16 Гц называют *инфразвуком*, с частотой выше границы звукового диапазона — *ультразвуком*. Инфразвук и ультразвук не вызывают звуковых ощущений, однако могут существенно влиять на самочувствие, поскольку нарушают нормальную работу внутренних органов и мозга.

Скорость звука c зависит от соотношения между плотностью среды ρ и её упругостью k : $c \sim \sqrt{k/\rho}$. Скорость звука в газах по порядку величины сопоставима со средней скоростью теплового движения молекул при комнатной температуре, и в лёгких газах (водород, гелий) существенно превышает скорость звука в воздухе.

Основные характеристики звука — *громкость* и *высота тона* зависят от амплитуды и частоты звуковых колебаний. Громкость звука пропорциональна энергии волны и, следовательно, увеличивается с увеличением амплитуды колебаний. Высота тона пропорциональна частоте колебаний. Таким образом, «количество» звука зависит от амплитуды, а его «качество» — от частоты колебаний.

5. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

5.1. Предмет и методы молекулярной физики. Понятие моля.

Атомистические представления о веществе своими корнями уходят в древность (Демокрит, Эпикур — 25 веков тому назад). Первые экспериментальные законы, которые легли в основу современной молекулярной теории, относятся к началу девятнадцатого столетия: это законы Гей-Люссака (1802 г.), Дальтона (1809 г.), Авогадро (1811 г.) и др. Работами Д. К. Максвелла и особенно Л. Больцмана в середине XIX века была создана молекулярно-кинетическая теория практически в том виде, в котором мы сейчас ею пользуемся. Она носит название *классической молекулярно-кинетической теории*, поскольку в её основе лежит применение законов классической механики (законов Ньютона) к движению молекул и атомов. Завершена классическая молекулярно-кинетическая теория работами Эйнштейна и Смолуховского в начале XX века.

Предметом изучения молекулярной физики является система, состоящая из большого числа атомов и молекул. Особенности их поведения обеспечивают различие свойств вещества в трёх его агрегатных состояниях: твёрдом, жидком и газообразном.

В молекулярной физике рассматривается движение отдельных молекул и атомов. Уместно, поэтому, уточнить, что нам теперь о них известно.

Из-за малости атомных размеров в физике атомов и молекул часто используют внесистемную единицу — ангстрем ($\text{\AA}$), равную 10^{-10} м. Предметы, имеющие размеры порядка нескольких ангстрем, до сих пор остаются не наблюдаемыми непосредственно. Оптический микроскоп позволяет различать предметы порядка длины световой волны, то есть 2000...3000 $\text{\AA}$. Электронный микроскоп существенно снижает этот предел до 4,5...5 $\text{\AA}$, значит, атом все-таки остаётся ненаблюдаемым.

Соединение нескольких атомов образует молекулу. Строение молекул в настоящее время хорошо изучено, а наиболее крупные из них — органические — можно наблюдать в микроскоп. На рис. 5.1 изображено строение молекул воды H_2O и углекислого газа CO_2 . Как мы видим, представление о молекуле, как о материальной точке, далеко от истины, но им пользуются и поныне для решения определённого круга вопросов.

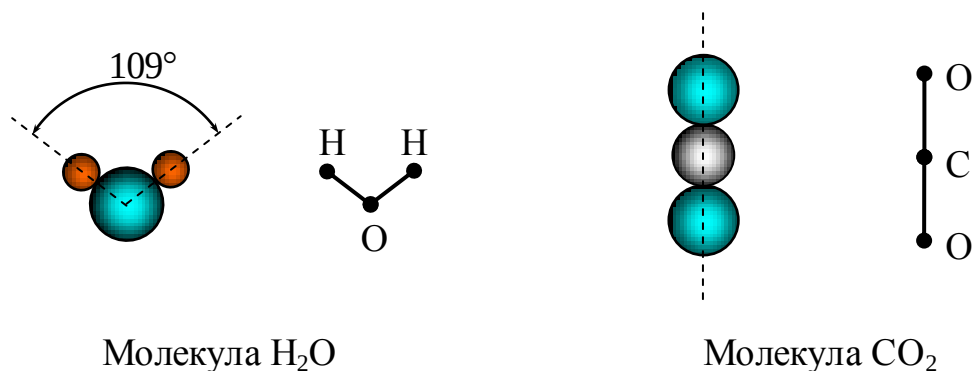


Рис. 5.1

Помимо радиуса, важнейшей характеристикой атома является его масса. Массу атома принято называть *атомной массой*, соответствующая характеристика для молекулы – *молекулярная масса*. Она, как и любая масса, может быть измерена в граммах либо килограммах, но тогда она будет иметь очень малый порядок (10^{-26} кг) из-за малости атома. Поэтому для атомов и молекул используют другую единицу измерения – *атомную единицу массы* (а.е.м.). Масса а.е.м. равна $1/12$ массы атома углерода (изотоп C^{12}), что в единицах СИ составляет приблизительно $1,66 \cdot 10^{-27}$ кг.

Массы атомов в а.е.м. указаны в периодической системе элементов Д.И. Менделеева. Они меняются в пределах от 1 а.е.м. для водорода до 238 а.е.м. для последнего природного элемента периодической системы химических элементов – урана. Массы атомов измерены очень точно, существуют специальные таблицы, где они указаны с точностью до шести знаков. Такую точность дают приборы – *масс-спектрографы*, с помощью которых в настоящее время определены массы атомов всех известных элементов. Работа масс-спектрографа основана на отклонении заряженных частиц в магнитном поле. Отклонение зависит от массы частицы и может быть зафиксировано, скажем, на флюоресцирующем экране.

Масса атома (либо молекулы), выраженная в атомных единицах массы, послужила основанием для введения *моля* – *единицы количества вещества*. Масса моля пропорциональна массе одной молекулы данного вещества и является для каждого вещества своей индивидуальной единицей. Она устанавливается следующим образом: *назовем молем вещества такое его количество, которое содержит столько же граммов, сколько атомных единиц массы содержит молекула этого вещества*. Так, молекула водорода (H_2) имеет молекулярную массу 2 а.е.м., а молекула кислорода (O_2) – 32 а.е.м. Соответственно моль водорода составит 2 грамма, а моль кислорода – 32 грамма.

Масса одного моля вещества называется его *молярной массой* и обозначается буквой μ . Единицей измерения молярной массы будет, очевидно, г/моль, либо кг/моль. Для приведённых в качестве примеров водорода и кислорода

$$\mu_1 = 2 \text{ г/моль} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}; \quad \mu_2 = 32 \text{ г/моль} = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Важнейшим следствием определения моля, имеющим место не только для газов, но и для всех трёх агрегатных состояний вещества, является определение *числа Авогадро* — *числа молекул в одном моле любого вещества*. Выше мы установили, что масса моля для каждого вещества своя из-за того, что молекулы (атомы) у веществ разные: у одних молекул масса больше, у других — меньше, соответственно и моли будут разными. Но отношение масс молекул двух разных веществ будет равно отношению масс их молей. Далее: пусть масса одной молекулы m_0 , тогда масса моля равна произведению этой величины на число N молекул в моле. Пусть для какого-то вещества молярная масса

$$\mu_1 = m_{01}N_1, \tag{5.1}$$

и, соответственно, для другого вещества

$$\mu_2 = m_{02}N_2. \tag{5.2}$$

Поделив эти равенства одно на другое, получим

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{m_{01}}{m_{02}} \cdot \frac{N_1}{N_2}, \quad (5.3)$$

что, с учетом пропорциональности массы моля массе молекулы, установленной определением моля, приводит к выводу:

$$N_1 = N_2 = N_A, \quad (5.4)$$

то есть число молекул в моле каждого вещества есть величина постоянная.

Иначе: *моль любого вещества содержит одно и то же число молекул, которое называется числом Авогадро*. Это справедливо для любых агрегатных состояний. Киломоль больше моля в 1000 раз, значит, и число молекул в киломоле больше. Впервые число Авогадро было определено в опытах [Ж. Перрена](#) (Франция, 1911 г.), а в настоящее время существует более 20 методов его определения. Округлённое до трёх значащих цифр число Авогадро

$$N_A \approx 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1}. \quad (5.5)$$

При создании Международной системы единиц СИ было принято новое определение моля вещества, основанное на том, что число молекул в моле любого вещества одинаково. Связано это было с тем, что существовавшее ранее и данное нами выше определение не всегда даёт требуемую точность в определении моля. Действительно, в таблице Д.И. Менделеева массы элементов указаны с точностью только до двух знаков, хотя экспериментально значения масс атомов найдены, как уже говорилось, с точностью до шести знаков.

Если же определить моль вещества, как такое его количество, которое содержит N_A молекул, вопрос о точности в определении моля отпадает. И при решении каждой конкретной задачи следует брать то число знаков, которое этой задаче соответствует. Естественно, чтобы взять моль вещества, никто не сможет отсчитать нужное число молекул. Поэтому практически используется всё-таки первое определение, которое первым исторически и возникло. Второе определение, связанное с числом Авогадро, лишь делает это определение более точным и лаконичным.

Знание числа Авогадро даёт возможность рассчитать массу молекулы или атома в килограммах для любого элемента периодической системы и любого химического соединения по массе его моля:

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A}. \quad (5.6)$$

Подставив размерности μ и N_A в эти выражения, Вы легко можете убедиться, что найденное Вами значение массы будет выражено в граммах (или в килограммах), но не в атомных единицах массы.

Известен *закон Авогадро*, имеющий место только для газов: *при одинаковых давлениях и температурах в одинаковых объёмах любых газов содержится одинаковое число молекул*. Можно и по-другому: *моль любого вещества в газообразном состоянии при одинаковых температурах и давлениях занимает один и тот же объём*. При нормальных условиях (760 мм рт. ст. и 0°C) он равен 22,4 л. Этот закон был установлен опытным путем из расчётов химических реакций.

Из-за ненаблюдаемости атомов и молекул — объектов изучения молекуляр-

ной физики — в ней пользуются методом гипотез. Он заключается в следующем: на основании наблюдений делается предположение (гипотеза), которое кладётся в основу расчётов. Полученный результат сравнивается с экспериментом. Если ответ совпадает с расчётом, гипотеза становится теорией.

Помимо малости объекта у молекулярной физики есть еще одна особенность: она имеет дело с очень большим числом молекул (атомов). Нам трудно даже представить насколько велико их число. Приведем для сравнения две цифры: одно тысячелетие содержит около $2 \cdot 10^{10}$ секунд, а один грамм меди содержит 10^{22} атомов. Поэтому молекулярная физика пользуется *статистическими методами*.

Статистика занимается наблюдением очень большого числа событий и делает вывод о значении средних величин, характеризующих эти события. Существует целый раздел математики, посвящённый этим вопросам (математическая статистика). Приложение этого хорошо развитого аппарата к движению атомов и молекул привело к образованию из молекулярной теории *статистической физики*. Основная её задача осталась прежней: нахождение макроскопических свойств системы по законам движения составляющих её микрочастиц. В настоящее время статистическую физику, как и молекулярную, разделяют на *классическую* и *квантовую*. Далее мы будем рассматривать только классический подход.

Молекулярная физика использует и *теорию вероятностей*, математический аппарат которой также хорошо развит. Изучение его связано с существенными временными затратами, но основные понятия теории вероятности легко усваиваются, равно как и её специфическая терминология.

Экспериментальной базой для построения классической молекулярной физики послужили *опытные газовые законы*, поэтому изучение раздела обычно начинают с них.

Газообразное состояние является простейшим из агрегатных состояний вещества. Молекулы газа слабо связаны друг с другом, движутся беспорядочно, поэтому газ может занимать сколь угодно большой объём. В физике существует понятие *идеального газа*, в котором взаимодействие между молекулами пренебрежимо мало, поэтому идеальный газ не может конденсироваться ни при каких условиях. В отличие от идеального, в *реальной газе* молекулы испытывают притяжение друг к другу, что при низких температурах приводит к образованию жидкости.

5.2. Опытные газовые законы

Состояние определённой массы m газа характеризуется тремя величинами, которые называют *параметрами* состояния: давлением p , объёмом V , температурой T . Иногда и массу включают в число параметров. Параметры состояния связаны между собой, и изменение одного из них приводит к соответственному изменению всех остальных. *Переход из состояния, характеризуемого определёнными значениями параметров, в состояние с другими их значениями носит название процесса*.

Если процесс происходит так, что при этом один из параметров не изменяется, то такой процесс называют *изопроцессом*. Таких изопроцессов три: *изотермический* – при постоянной температуре, *изобарический* – при постоянном давлении, и *изохорный* – при неизменном объёме. Математическое выражение, устанавливающее связь между параметрами, называют газовым законом либо *уравнением процесса*. Уравнений изопроцессов соответственно три:

$$\begin{array}{ll} \text{при } T = \text{const}; & pV = \text{const}; \\ \text{при } p = \text{const}; & \frac{V}{T} = \text{const}; \\ \text{при } V = \text{const}; & \frac{p}{T} = \text{const}. \end{array} \quad (5.7)$$

Каждое из этих уравнений включает два параметра, показывает закон их взаимного изменения при не изменяющемся третьем параметре и постоянной массе.

Заданные газовыми законами зависимости (5.7) нетрудно изобразить графически. Сделайте это самостоятельно, используя в качестве координат те переменные, которые есть в уравнениях. Графиков, как и уравнений, будет три. Но чаще всего используют координаты p - V , так как в этом случае на диаграмме видна *работа*, совершаемая при газовом процессе. Действительно, если направление силы давления совпадает с направлением перемещения, как в случае движения поршня в цилиндре, *элементарная работа* определяется выражением

$$dA = Fdl, \quad (5.8)$$

где F – сила, с которой газ действует на поршень; dl – бесконечно малое перемещение поршня. Так как сила равна произведению давления на площадь поршня $F = pS$, а Sdl – это бесконечно малое приращение объёма dV , то *элементарная работа, совершаемая газом при изменении своего объёма*

$$dA = p dV. \quad (5.9)$$

Полученное нами простое и очень важное соотношение позволяет найти работу газа при бесконечно малом изменении объёма. Работа будет положительна при расширении газа, когда изменение объёма положительно. При этом расширяющийся газ производит работу над окружающей средой. При сжатии газа работу над системой производят внешние силы. Этому случаю соответствует отрицательная работа газа, поскольку при сжатии объём газа уменьшается, и $dV < 0$.

В координатах p - V произведённая работа имеет наглядную геометрическую интерпретацию — площадь под графиком зависимости $p(V)$. На рис. 5.2 показано изменение давления при изотермическом расширении газа. Ясно, что элементарная работа (5.9), совершаемая газом при увеличении его объёма на dV , изобразится площадью выделенной узкой вертикальной полоски. Полная работа, складываясь из элементарных работ, будет равна площади криволинейной трапеции под кривой 1 – 2, и её значение A_{12} можно вычислить как определённый интеграл:

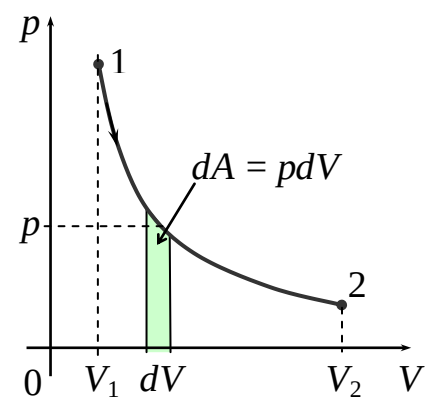


Рис. 5.2

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (5.10)$$

Из уравнений (5.9) и (5.10) очевидно, что при *изохорном процессе работа не совершается*, поскольку изменение объёма равно нулю. В случае *изобарического процесса* работа находится особенно просто: давление постоянно, поэтому оно выносится за знак интеграла и для расчёта работы его нужно умножить на конечное изменение объёма в указанных в конкретной задаче пределах:

$$A_{12} = p(V_2 - V_1). \quad (5.11)$$

Если объём увеличился, работа будет положительной, то есть, произведена самой системой. При уменьшении объёма (при сжатии) работа отрицательна, она производится над системой. Работа *изотермического процесса* находится несколько сложнее, поскольку под интегралом оказывается две переменные величины. Вычисление работы в этом нелинейном случае вы выполните на практических занятиях.

Если в результате проведения нескольких процессов система вернулась в исходное состояние, говорят, что в системе произошёл *циклический* или *круговой* процесс. На рис. 5.3 изображён такой процесс в координатах p – V . Система вначале находилась в состоянии 1, с давлением p_1 и объёмом V_1 , затем перешла в состояние 2 с параметрами p_2 , V_2 и, испытав сжатие, вернулась в исходное состояние по кривой 2–1. При расширении газ совершил *положительную работу* A_{12} , о величине которой можно судить по площади под верхней кривой (см. рис. 5.3). При сжатии газа до прежних параметров работы совершали внешние силы, и работа газа A_{21} , равная площади под нижней кривой, здесь отрицательна. Работа, совершённая системой за цикл, равна алгебраической сумме работ расширения и сжатия:

$$A_{\text{цикл.}} = A_{12} + A_{21}, \quad (5.12)$$

а на диаграмме p – V – площади замкнутой фигуры, образованной кривыми расширения и сжатия, то есть площади цикла.

Рассмотрим ещё один, четвертый по счёту газовый процесс — *адиабатический*. Он не является изопроцессом, поскольку в этом процессе меняются все три параметра, но весь процесс происходит *без теплообмена* системы с окружающей средой, то есть без подвода и без отвода какого-либо количества теплоты.

Полезно помнить, что газовые процессы, за исключением изохорического, связаны с изменением объёма. Они могут протекать в двух направлениях, то есть являются либо *сжатием*, либо *расширением*, и осуществляются за счет изменения давления или температуры. При адиабатном процессе меняются сразу и давление, и температура. Поэтому в последнем случае объём меняется более интенсивно, чем, скажем, при изотермическом процессе. Это отражается как в уравне-

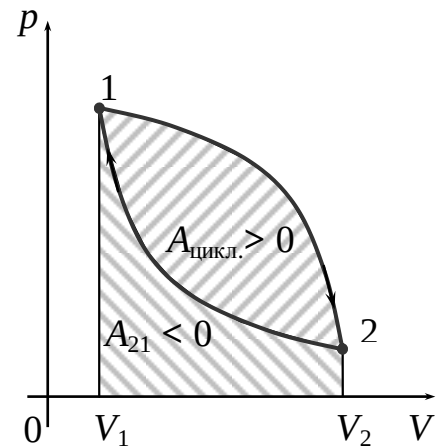


Рис. 5.3

нии адиабаты, так и на графике (рис. 5.4). В уравнение адиабатического процесса объём входит в степени γ :

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (5.13)$$

где γ – *постоянная адиабаты*, различная для различных газов и всегда большая единицы. Значит, одному и тому же изменению объёма ΔV при изотермическом процессе будет соответствовать меньшее изменение давления, нежели при адиабатическом процессе.

В курсе средней школы показано, что, объединяя три газовых закона, можно получить объединённый газовый закон, а затем и уравнение Менделеева – Клапейрона, или иначе – *уравнение состояния идеального газа*:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (5.14)$$

где R – *универсальная газовая постоянная*.

В этом уравнении связаны все параметры, характеризующие состояние вещества: p , V , T и m . Нетрудно показать, что из уравнения (5.14) можно легко получить уравнение любого изопроцесса.

Входящая в уравнение (5.14) величина μ – это масса одного моля газа. Поделив массу m всего вещества на массу одного моля, получим *число молей*

$$\nu = \frac{m}{\mu}. \quad (5.15)$$

Часто величину ν именуют количеством вещества, забывая при этом сказать, что это количество выражено не в килограммах, а в молях.

Имея уравнение Менделеева – Клапейрона, мы сможем теперь уточнить, как вычисляется работа, совершаемая газом при изотермическом и адиабатическом процессах. В равенстве (5.10) под интегралом стоят две переменные — давление и объём. Уравнение связывает их и поэтому позволяет давление заменить через объём и постоянные величины: $p = mRT/(\mu V)$. Подставив полученное значение давления под интеграл и проведя интегрирование, вы получите выражения для вычисления работы при этих процессах. Всё это вы проделаете на практических занятиях.

Покажем теперь, как можно преобразовать уравнение Менделеева – Клапейрона, введя вместо универсальной газовой постоянной R новую, широко используемую в физике константу k .

Используя число Авогадро N_A , можно представить универсальную газовую постоянную R в виде произведения:

$$R = kN_A, \quad (5.16)$$

где k – новая постоянная, называемая *постоянной Больцмана*. Тогда

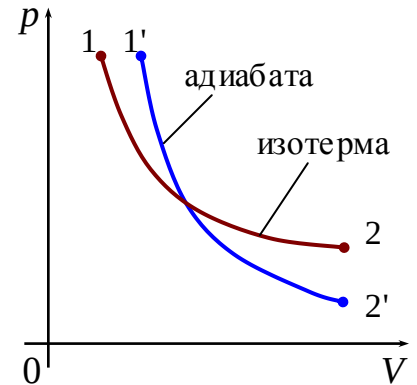


Рис. 5.4

$$pV = \frac{m}{\mu} N_A kT, \quad (5.17)$$

где величина

$$\frac{m}{\mu} N_A = N \quad (5.18)$$

даёт общее число молекул в массе m газа с молярной массой μ . Следовательно,

$$pV = NkT. \quad (5.19)$$

Если ввести *концентрацию молекул* $n = N/V$, то получим уравнение

$$p = nkT, \quad (5.20)$$

то есть давление газа пропорционально количеству молекул в единице объёма.

5.3. Элементы теории вероятностей

5.3.1. Функция распределения, условие её нормировки.

Основой молекулярно-кинетической теории является представление о хаотичном, беспорядочном движении молекул. Вопрос о величине скорости и энергии этого движения был одним из первых, который предстояло решить. Задача была решена Д. Максвеллом в середине XIX века. Речь шла, естественно, не о скорости и энергии каждой молекулы, но о каких-то *средних* для системы молекул значениях этих величин. Решить подобную задачу можно, лишь пользуясь основными понятиями *теории вероятностей*, где рассматриваются законы, характерные для событий, называемых *случайными*.

Случайное событие может состояться, а может и не состояться, в отличие от *закономерного события*, которое предопределено законом. Так, скорость тела, движущегося с известным ускорением a , может быть точно рассчитана для любого момента времени по уравнению равноускоренного движения. Скорость же конкретной молекулы непредсказуема, она меняется в зависимости от случайных условий.

Из совокупности случайных величин принято выделять *благоприятные события*. Например, при стрельбе в мишень результат каждого выстрела можно считать случайным событием. Среди них будет несколько благоприятных, например, попавших в центр мишени. Рассматриваемое понятие субъективно или, скорее, зависит от цели проводимого эксперимента: событие, благоприятное для получения ожидаемого результата в одном опыте, может быть неблагоприятным в другом опыте. Так, рассчитывая эмиссию молекул с поверхности нагретого тела, благоприятным событием мы будем считать встречу (или, иначе, обнаружение) быстрой молекулы. Решая задачу о сжижении газа, мы, наоборот, за благоприятное событие сочтём встречу молекулы, обладающей малой скоростью.

Итак, пусть имеется большое число N однотипных событий (выстрел по мишени, например). Из них N_i будет благоприятных, например, попадание в "десятку". *Вероятностью* благоприятного события назовём отношение

$$w_i = \frac{N_i}{N}. \quad (5.21)$$

В случае, если $N_i = N$, то есть все имевшие место события благоприятны, вероятность w_i будет равна единице. Это максимально возможное значение вероятности. Оно носит название *достоверности*.

Часто бывает, что значения рассматриваемых случайных величин непрерывны. Например, возраст студентов, находящихся в аудитории, — величина случайная, меняющаяся непрерывно: в аудитории может присутствовать студент в возрасте 18 лет, 6 месяцев и 3 дня; 18 лет, 5 месяцев, 20 дней и т.д. Возраст студентов представит непрерывный ряд значений. В этом случае ставить вопрос о вероятности найти в аудитории студента с возрастом ровно 18 лет не имеет смысла: такого студента, скорее всего, в аудитории не окажется. При постановке вопроса о вероятности нужно указывать не точный возраст, а с каким-либо интервалом: год, месяц, неделя и т.д. Например: 18 лет $\pm 1/2$ года; 18 лет ± 3 месяца.

В случае непрерывной случайной величины число благоприятных событий нужно заменить интервалом: $N_i \rightarrow dN$. Тогда вероятность встретить значение случайной величины в данном интервале будет частью полной вероятности:

$$dw = \frac{dN}{N}. \quad (5.22)$$

Обозначим случайную величину (в нашем случае — возраст студента) через x . Тогда интервал dx значений случайной величины покажет точность, с которой мы указывали эту случайную величину. Точность (то есть ширина интервала), с которой указывается значение случайной величины, выбирается произвольно. Но чем шире интервал (больше dx), тем больше вероятность встретить заданное значение случайной величины. Так, в рассмотренном примере с возрастом студентов, вероятность встретить в аудитории студента, которому 18 лет $\pm 1/2$ года больше, чем вероятность встретить студента, которому 18 лет ± 3 дня. Иначе говоря, вероятность dw пропорциональна ширине dx выбранного интервала:

$$dw = k dx \quad (5.23)$$

В свою очередь, коэффициент k не является постоянной величиной, он зависит от положения интервала dx на оси x (рис. 5.5).

Действительно, несмотря на то, что величина интервалов одинакова, то есть $dx_1 = dx_2 = dx_3$, вероятность встретить студента с возрастом, принадлежащим интервалу dx_1 , будет существенно меньше вероятности встретить студента с возрастом в интервале dx_2 . Выражение (5.23) следует изменить так, чтобы отметить факт непостоянства коэффициента k , его зависимость от x :

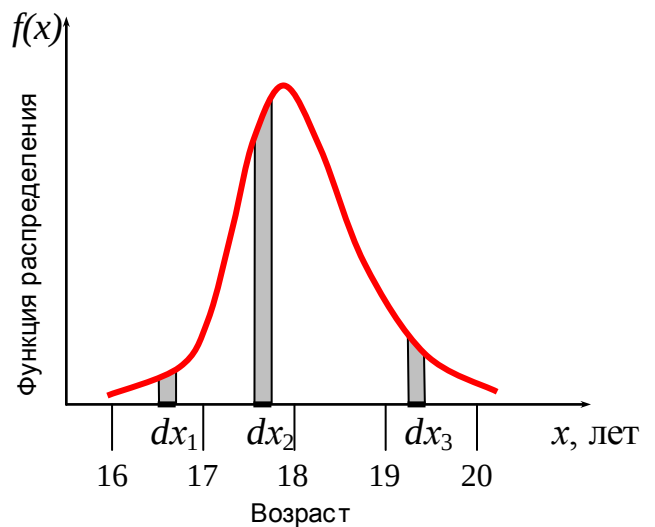


Рис. 5.5

$$dw = f(x)dx, \quad (5.24)$$

где $f(x)$ носит название *функции распределения*.

Равенство (5.24) так же, как и (5.22), служит определением вероятности случайной величины, значение которой укладывается заданный интервал dx . Сравнивая эти два равенства, получим для функции распределения следующее выражение:

$$f(x) = \frac{dN}{N} \frac{1}{dx}. \quad (5.25)$$

То есть, функция распределения показывает *относительное число благоприятных событий в единичном интервале изменения случайной величины*.

Если нужно найти вероятность w для конечного интервала $\Delta x = x_2 - x_1$ изменения случайной величины, то она выразится интегралом:

$$w = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \quad (5.26)$$

Отыскивая вероятность по всей области существования случайной величины x , следует брать бесконечные пределы:

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx. \quad (5.27)$$

В последнем случае вероятность равна достоверности: $w = 1$, следовательно

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \quad (5.28)$$

Полученное уравнение называют *условием нормировки* функции распределения. Пределы в (5.28) показывают, что суммирование ведется по всему интервалу возможных значений случайной величины. В зависимости от того, что мы понимаем под x , "бесконечность" принимает то или иное значение. Так, например, в случае с вычислением среднего возраста студента за $+\infty$ можно принять, скажем, 50 или 60 лет, а за $-\infty$ — 5 или 7 лет.

5.3.2. Применение функции распределения.

Функция распределения может быть использована для нахождения средней величины. Рассмотрим пример. Пусть имеется N песчинок. Найдем $\langle x \rangle$ — средний линейный размер песчинки:

$$\langle x \rangle = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots + N_m x_m}{N}, \quad (5.29)$$

где N_1 — число песчинок размером x_1 , N_2 — размером x_2 и т.д. Поделив почленно, получим:

$$\langle x \rangle = \frac{N_1}{N} x_1 + \frac{N_2}{N} x_2 + \dots + \frac{N_m}{N} x_m, \quad (5.30)$$

или, заменив $\frac{N_i}{N}$ через w_i , найдём среднее значение:

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{i=m} x_i w_i . \quad (5.31)$$

Для непрерывной случайной величины вместо w_i вводим $dw = f(x)dx$, и вместо суммирования нужно интегрировать:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx . \quad (5.32)$$

Следовательно, для нахождения среднего значения случайной величины нужно знать вид функции распределения $f(x)$, то есть форму её зависимости от случайной величины x .

5.4. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

Теперь получим основное уравнение молекулярно–кинетической теории, применяя метод, о котором речь шла выше — метод гипотез. Основой для его использования должен служить опыт. Мы будем опираться на уравнение (5.20), связывающее давление идеального газа с его температурой. Напомним, что оно является непосредственным следствием уравнения Менделеева — Клапейрона, которое получено как обобщение опытных газовых законов.

Вычислим это давление, исходя из предположения, что оно создаётся ударами молекул о стенки сосуда и определяется как силой удара одной молекулы, так и числом молекул, ударившихся о единицу площади стенки. Прежде, чем воспользоваться вторым законом Ньютона для расчёта силы удара, следует сделать одно замечание: этот закон — экспериментальный, его можно использовать лишь в той области, в которой он проверен, то есть для макрообъектов. Приступая к вычислениям, *предположим, что движение молекул тоже подчиняется этому закону. Предположение гипотетическое, и должно быть проверено на опыте.* Поскольку непосредственными наблюдениями этого сделать нельзя, мы продолжим вычисления. Получив конечный результат и сверив его с опытом, мы сможем сделать вывод о справедливости высказанной гипотезы. Итак, приступим к расчёту силы удара одной молекулы.

По закону Ньютона эта сила зависит от массы молекулы и от изменения вектора скорости за время удара. На рис. 5.6 показана ситуация, когда молекула подлетает к стенке под некоторым углом и упруго отскакивает от стенки без потери скорости. Приращение вектора скорости $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ найдено по правилу вычитания векторов. Очевидно, что $\Delta \vec{v}$ определяется как величиной самой скорости, так и углом, под которым молекула подлетала к стенке. И то, и другое для каждой молекулы имеет своё значение, поскольку движение молекул хаотично. Во время удара молекула получает импульс силы, направленный перпендикулярно стенке. Такой же по величине, но противоположно направ-

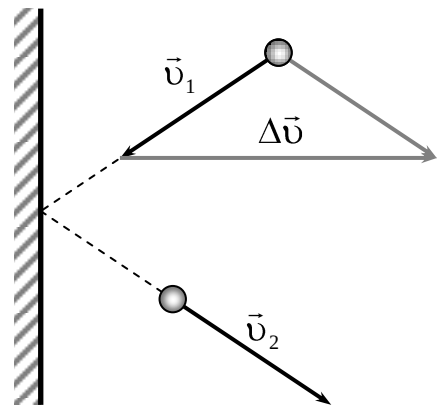


Рис. 5.6

ленный импульс силы получает стенка вследствие удара молекулы. Импульс силы может быть найден из второго закона Ньютона:

$$\vec{f}_0 \Delta t = \Delta(m_0 \vec{v}) = m_0 \Delta \vec{v}, \quad (5.33)$$

где m_0 — масса одной молекулы.

Условимся под величиной скорости далее понимать её среднее значение, найденное, к примеру, по (5.32). Чтобы обойти трудности, связанные с разнообразием направлений скорости, разложим произвольно направленный вектор скорости на три составляющие (рис. 5.7). Нетрудно убедиться, что

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \quad (5.34)$$

Поскольку газ, находящийся в сосуде, не подвергается каким-либо внешним воздействиям, мы вправе предположить, что нет преимущественного направления движения, т. е. проекции равны. Тогда

$$v^2 = 3v_x^2, \quad (5.35)$$

и теперь можно считать, что молекулы движутся лишь в направлении осей координат.

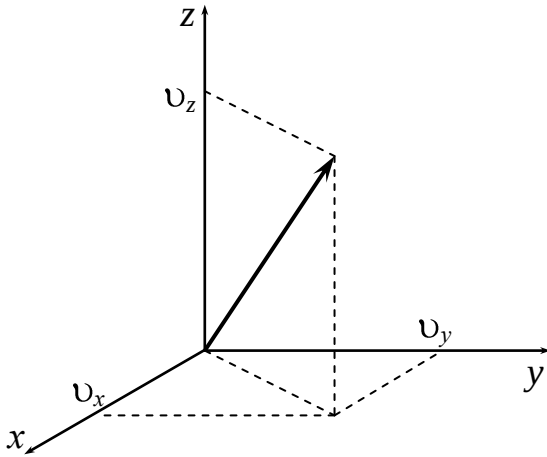


Рис. 5.7

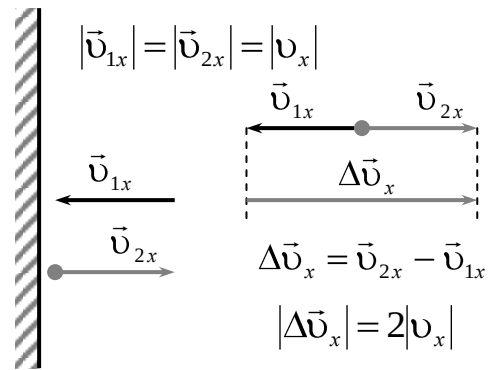


Рис. 5.8

На рис. 5.8 показано, как находится вектор $\Delta \vec{v}_x$ и его модуль $|\Delta \vec{v}_x|$, который равен двум v_x , поскольку удар изменил лишь направление скорости, оставив величину её неизменной. С учётом этого из (5.33) получаем выражение для величины силы, подействовавшей на стенку вследствие удара одной молекулы:

$$f_0 = \frac{2m_0 v_x}{\Delta t}. \quad (5.36)$$

Поскольку давление — это сила, действующая на единицу площади, то

$$p = \frac{f_0 N_x}{\Delta S} \quad \text{или} \quad p = \frac{2m_0 v_x N_x}{\Delta S \Delta t}, \quad (5.37)$$

где через N_x обозначено число ударов, полученных элементом площади ΔS за время Δt . Найдём эту величину.

Выделим на стенке сосуда элемент площади ΔS (рис. 5.9). В площадку ΔS за промежуток времени Δt ударят лишь те молекулы, которые находятся в объёме изображённого на рис. 5.9 цилиндра с площадью основания ΔS и длиной $v_x \Delta t$ и

движутся по направлению к стенке. Молекулы, которые находятся дальше от стенки (на расстоянии $l > v_x \Delta t$), не ударятся об неё, если даже они будут двигаться к ней, поскольку за Δt секунд не успеют подлететь к стенке. Число молекул в выделенном объёме пропорционально объёму цилиндра и концентрации n молекул:

$$N = v_x \Delta t \Delta S n, \quad (5.38)$$

Найденная нами величина даёт возможность рассчитать число молекул, обладающих проекцией скорости v с индексом x , заключённых в выделенном объёме. Нас же интересуют только те молекулы, находящиеся в этом объёме, которые летят *к стенке*. Из-за полной хаотичности теплового движения таких молекул будет ровно половина, так как другая половина летит в это же время *от стенки*. Подставив в (5.37) половину результата (5.38), получим конечную формулу для расчёта давления как следствие упругих ударов молекул:

$$p = m_0 v_x^2 n \quad (5.39)$$

Сравнив полученный результат с экспериментальной формулой (5.20) и заменив v_x^2 по (5.35) на $v^2/3$, будем иметь:

$$\frac{m_0 v^2}{2} = \frac{3kT}{2}, \quad \text{или} \quad \langle e_n \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (5.40)$$

где через $\langle e_n \rangle$ обозначена средняя энергия поступательного движения *одной* молекулы.

Последнее уравнение носит название *основного уравнения молекулярно – кинетической теории*. Оно получило такое название из-за того, что широко используется в физике.

Прежде всего, оно даёт возможность установить *термодинамическую или абсолютную шкалу температур*. Из уравнения следует, что температура T равна нулю тогда, когда средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул обращается в ноль. Как и кинетическая энергия, абсолютная температура всегда положительна. Определённая таким образом шкала температур *носит название шкалы Кельвина*. Для перевода температуры из этой шкалы в шкалу Цельсия, нужно знать, чему равна абсолютная температура точки замерзания воды, которая, как известно, равна 0°C . По современным измерениям, эта температура равна $273,15\text{ K}$ (градусов Кельвина). Поэтому, чтобы найти температуру по Кельвину, нужно к температуре по Цельсию добавить 273 градуса.

Основное уравнение используется при расчёте многих практически важных величин. Например, при расчёте теплоёмкости не только газов, но и твёрдых тел. Теплоёмкости интересны для нас сейчас ещё и потому, что их можно определить опытным путём. Значит, сравнивая теоретически вычисленные значения тепло-

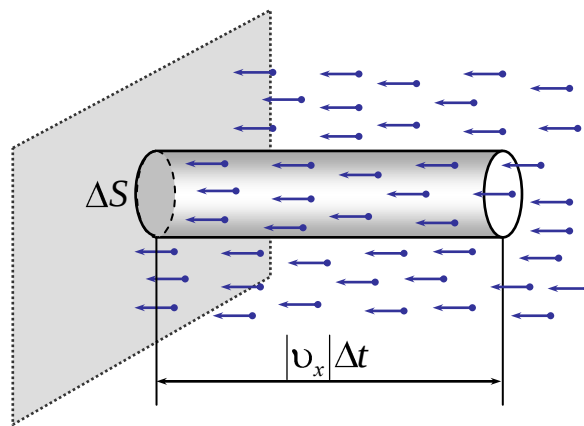


Рис. 5.9

ёмкостей с опытными, мы получаем возможность судить о справедливости гипотез, положенных в основу расчётов.

5.5. Понятие о степенях свободы, равномерное распределение энергии молекул по степеням свободы

Прежде, чем обсуждать возможность расчета теплоёмкости вещества по величине средней кинетической энергии движения каждой его молекулы, внесем некоторые уточнения в уравнение (5.40), определяющее величину этой энергии. Оно было получено в предположении, что молекулы движутся поступательно, без вращения. Однако, если молекула состоит из двух и более атомов, то нужно учитывать их вращательное движение и связанную с ним энергию

Назовем *числом степеней свободы* молекулы число возможных её движений, либо число *независимых* координат, однозначно задающих её положение. Ясно, что материальная точка будет иметь три степени свободы, соответствующие трем осям координат. Если при трёх степенях свободы молекула согласно (5.40) обладает энергией $\frac{3}{2}kT$, то на одну степень свободы придется энергия $\frac{1}{2}kT$.

Это будет иметь место при допущении, что все степени свободы (движение вдоль каждой оси), равноправны. Тогда для молекулы, имеющей i степеней свободы, средняя энергия теплового движения

$$\langle e_k \rangle = \frac{i}{2} kT. \quad (5.41)$$

Теперь коснемся вопроса о том, как определять число степеней свободы у молекулы. Относительно *одноатомной* молекулы мы выяснили — она имеет три степени свободы, соответствующие движению по трём осям.

Рассмотрим жёсткую *двухатомную* молекулу (рис. 5.10), в которой расстояние между атомами в процессе теплового движения не меняется. Эта молекула может участвовать в поступательном движении по трём осям, то есть имеет три *поступательные* степени свободы ($i_{\text{п}} = 3$). Кроме того, она может вращаться вокруг осей x и z . Вращение вокруг оси y совпадёт с осью молекулы, поэтому у двухатомной молекулы будет только две степени свободы, характеризующих вращение: ($i_{\text{вр}} = 2$). В сумме молекула будет обладать пятью степенями свободы: ($i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}}$).

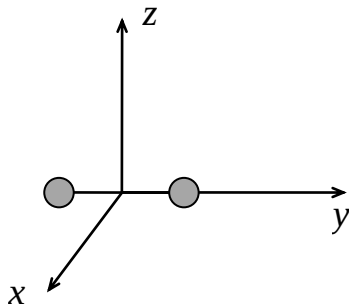


Рис. 5.10

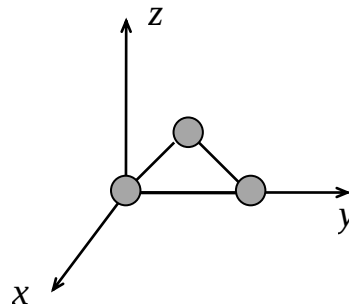


Рис. 5.11

Трёхатомная жёсткая молекула (рис. 5.11) будет, как и две предыдущие, обладать тремя поступательными степенями свободы ($i_{\text{п}} = 3$) и тремя вращательными ($i_{\text{вр}} = 3$). В итоге число степеней свободы трёхатомной жёсткой молекулы будет равно шести ($i = 6$).

Число степеней свободы двухатомной молекулы может равняться семи ($i = 7$) для случая, когда при соударениях друг с другом изменяется расстояние между атомами в молекуле и к энергии поступательного и вращательного движений добавляется еще и энергия колебательного движения. Это имеет место при достаточно высоких ($>10^3 \text{ K}$) температурах.

5.6. Вычисление теплоёмкостей C_V и C_p , сравнение вычисленных значений с опытными

Теплоёмкостью C тела называется количество теплоты, необходимое для нагревания тела на один градус. Если нагревается 1 грамм или 1 килограмм вещества, теплоёмкость называют *удельной* (c), если нагревается 1 моль — *молярной* теплоёмкостью (C^μ). Запишем определяющие формулы для этих теплоёмкостей:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}; \quad c = \frac{\delta Q}{dTm}; \quad C^\mu = \frac{\delta Q}{dT\nu} = \frac{\delta Q\mu}{dTm}. \quad (5.42)$$

Здесь dT — бесконечно малое приращение температуры тела вследствие поглощения им бесконечно малого количества теплоты δQ . Во второй формуле, определяющей удельную теплоёмкость c , теплоёмкость тела C поделена на массу m тела, а в третьей формуле, определяющей молярную теплоёмкость — на число молей $\nu = m/\mu$.

Как показывает опыт, величина теплоёмкости зависит от условий, при которых проходит нагревание. При *постоянном объёме* подводимое к газу количество теплоты, затраченное на повышение температуры на один градус, будет меньше, чем если нагревать газ при других условиях: когда газ нагревается при постоянном объёме (плотно закрыт крышкой), подводимая энергия будет затрачиваться только на нагревание газа, так как газ не расширяется, и, следовательно, не совершает работы. Значит, при постоянном объёме всё подводимое к газу тепло идёт на увеличение кинетической энергии молекул:

$$\delta Q = dE_k. \quad (5.43)$$

Так как средняя кинетическая энергия одной молекулы равна $\frac{i}{2}kT$, то средняя кинетическая энергия всех молекул, содержащихся в одном моле вещества, будет в N_A раз больше, а в массе газа m — ещё в m/μ раз больше:

$$\langle E_k \rangle = \frac{i}{2}kT \frac{m}{\mu} N_0 = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{i}{2} \nu RT, \quad (5.44)$$

где ν — число молей вещества.

Следовательно, при постоянной массе вещества (и неизменном числе степеней свободы!) изменение кинетической энергии может происходить лишь за счёт

температуры. Поскольку подводимая теплота целиком идёт на изменение кинетической энергии движения молекул, то молярная теплоёмкость идеального газа при постоянном объёме

$$C_V^\mu = \frac{\delta Q}{dT_V} = \frac{i}{2} \frac{\nu R dT}{dT_V} = \frac{i}{2} R. \quad (5.45)$$

Полученный результат свидетельствует, что теплоёмкость любых газов с одинаковым числом степеней свободы одинакова и не зависит от температуры.

Если условия нагревания будут иными, например, если газ помещён под подвижный поршень, нагревание газа будет сопровождаться его изобарическим расширением, то есть процесс нагревания будет идти при постоянном давлении. В этом случае подводимое к газу количество теплоты, пойдёт не только на увеличение температуры, но и на совершение работы: $\delta Q = dE_k + \delta A$. Элементарная работа газа может быть найдена по (5.9): $\delta A = p dV$. Тогда молярная теплоёмкость при постоянном давлении

$$C_p^\mu = \frac{\delta Q}{dT_V} = \frac{dE_k + \delta A}{dT_V} = \frac{dE_k + p dV}{dT_V}. \quad (5.46)$$

Из уравнения Менделеева—Клапейрона (5.14) при условии $p = \text{const}$

$$p dV = \frac{m}{\mu} R dT = \nu R dT. \quad (5.47)$$

Подставив это, а также значение E_k по (5.44) в выражение (5.46), получим:

$$C_p^\mu = C_V^\mu + R. \quad (5.48)$$

Последнее равенство носит название уравнения Р. Майера. Оно свидетельствует, что разница между молярными теплоёмкостями C_p^μ и C_V^μ равна работе, которую производит один моль газа при нагревании на один градус. Это и есть физический смысл универсальной газовой постоянной, что подтверждается и её размерностью: $\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$. Используя полученное нами значение теплоёмкости при постоянном объёме (5.45), получаем для идеального газа формулу молярной теплоёмкости при постоянном давлении:

$$C_p^\mu = \frac{i+2}{2} R. \quad (5.49)$$

Отношение теплоёмкостей при постоянном давлении к теплоёмкости при постоянном объёме

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} = \gamma \quad (5.50)$$

зависит только от числа степеней свободы молекул газа и равно показателю адиабаты γ (см. уравнение 5.13).

Итак, согласно теории, *теплоёмкость идеального газа не зависит ни от температуры, ни от индивидуальных особенностей газа*. Обе теплоёмкости могут быть легко вычислены для газов, состоящих из молекул с любым числом степеней свободы. Этот расчет открывает возможность для сравнения теоретических значений теплоёмкостей с опытными значениями, чтобы тем самым проверить истинность идей, положенных в основу вывода уравнений (5.45) и (5.49).

Ниже приведена табл. 5.1, где сравниваются вычисленные по (5.45) молярные теплоёмкости при постоянном объёме с опытными значениями этой величины, найденными для разных газов при комнатной температуре.

Таблица 5.1

Газ		i	$C_V^\mu = \frac{i}{2}R$, Дж/(моль·К)	Опытные значения C_V^μ , Дж/(моль·К)
Гелий	He	3	12,47	12,50
Аргон	Ar			12,45
Кислород	O ₂	5	20,79	20,60
Азот	N ₂			20,70
Аммиак	NH ₃	6	24,94	25,80
Водяной пар	H ₂ O			25,83

Очень хорошее совпадение с опытом — до третьего знака включительно, наблюдается для одноатомных газов. Расхождение с опытом по мере возрастания числа степеней свободы имеет место сначала в третьем знаке, а затем и во втором знаке — для газов с шестью степенями свободы. Это расхождение может быть устранено учетом колебательных движений (колебательных степеней свободы) более крупных молекул.

Иначе обстоит дело с явным противоречием теории и эксперимента относительно зависимости теплоёмкости от температуры. Равенства (5.45) и (5.49) предсказывают постоянство величин c_V и c_p , их независимость от температуры. В табл. 5.2 показано изменение теплоёмкости водорода с повышением температуры, полученное в эксперименте. Оно столь значительно, что им нельзя пренебречь. Наблюдаемая зависимость теплоёмкостей и других газов от температуры явилась поводом для критического анализа основ классической молекулярно-кинетической теории и для перехода к квантовым представлениям.

Таблица 5.2

T , К	35	80	224	573	2273
C_V^μ , Дж/(моль·К)	12,50	13,15	18,35	21,00	27,20

5.7. Распределение молекул в потенциальном силовом поле

Уравнение (5.20), связывающее давление газа с концентрацией и температурой, даёт возможность получить ещё один, очень важный закон, устанавливающий связь концентрации молекул с их потенциальной энергией.

Речь здесь идёт не об энергии взаимодействия молекул между собой, а о потенциальной энергии молекул, находящихся в поле каких-либо внешних сил. Таким полем является, например, электростатическое поле ионов кристаллической решётки металлов, действующее на движущиеся в нём свободные электроны — "молекулы" электронного газа.

Земное тяготение тоже влияет на молекулы воздуха, притягивая их к Земле. Потенциальная энергия каждой молекулы, так же как и любого тела, зависит от высоты: $e_p = m_0gh$ (напоминаем, что эта формула может использоваться при небольших, по сравнению с радиусом Земли, высотах, то есть при $h \ll R$, например, до высот порядка 100 км). Казалось бы, что в результате земного притяжения все молекулы должны осесть на поверхности Земли, то есть занять такое положение, в котором их потенциальная энергия минимальна. Но этого не происходит. Тепловое движение своими ударами разбрасывает молекулы, заставляя их подняться на высоту h . В результате атмосфера имеет определённую толщину.

Концентрация молекул по мере удаления от Земли постепенно уменьшается. Получим закон её изменения с увеличением высоты, позволяющий найти концентрацию молекул на заданной высоте.

На рис. 5.12 изображён столб газа с площадью основания S . В столбе выделен тонкий слой толщиной dh . Пусть в точках нижнего основания этого слоя (на высоте h) давление равно p , тогда в точках верхнего основания (на высоте $h + dh$) давление будет равно $p + dp$. Приращение давления dp будет отрицательным, так как с увеличением высоты давление уменьшается. Изменение давления можно найти, поделив силу тяжести, действующую на все молекулы, находящиеся в слое, на площадь основания:

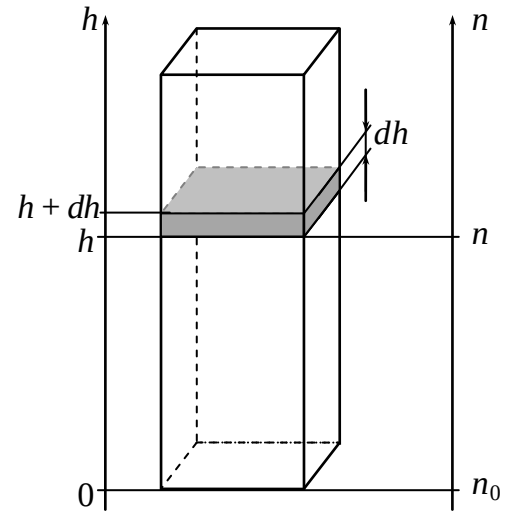


Рис. 5.12

$$dp = -\frac{m_0g(nSdh)}{S} = -m_0gndh. \quad (5.51)$$

С другой стороны, уменьшение давления в слое dh связано с уменьшением концентрации молекул:

$$p = nkT; \Rightarrow dp = kTdn. \quad (5.52)$$

Приравнявая правые части уравнений (5.52) и (5.51), получаем

$$kTdn = -m_0gndh. \quad (5.53)$$

Разделив переменные и проинтегрировав выражение (5.53) в пределах от n_0 до n по концентрации, и от 0 до h по высоте, получим искомый закон:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0gh}{kT}} \quad \text{или} \quad n = n_0 e^{-\frac{e_p}{kT}}, \quad (5.54)$$

где n_0 — концентрация молекул на нулевой высоте (на поверхности Земли), n — концентрация на любой интересующей нас высоте h , а e_p — потенциальная энергия одной молекулы на высоте h .

На рис. 5.13 представлены графики зависимости $n(e_p)$ при двух значениях температуры. Подумайте, какой кривой соответствует более высокая температура!

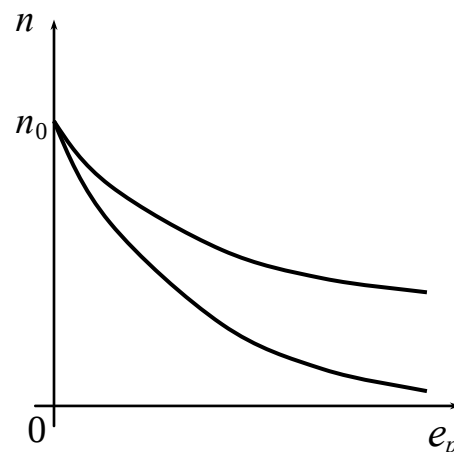


Рис. 5.13

Полученное уравнение носит название распределения молекул в силовом поле, поскольку потенциальная энергия может быть энергией любых сил, удовлетворяющих условию *потенциальности*: работа, совершаемая такими силами, не зависит от траектории. Равенство (5.54) известно в физике под названием *распределения Больцмана*. Оно неоднократно встретится нам при дальнейшем изучении курса физики.

Теперь же заметим, что при умножении обеих частей в (5.54) на κT мы получим закон изменения давления с увеличением высоты:

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 g h}{\kappa T}} = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}. \quad (5.55)$$

Равенство носит название *барометрической формулы*. Она используется для градуировки барометров при их использовании как высотомеров. Для нас же барометрическая формула интересна тем, что позволяет сверить полученное распределение с опытом. Действительно, измеряя давление на разных высотах, можно получить экспериментальную зависимость атмосферного давления от высоты. Эта зависимость действительно оказалась экспоненциальной, как того и требуют уравнения (5.54) и (5.55).

Следует отметить, что распределение Больцмана позволило опытным путём определить число Авогадро. Измеряя число частиц в коллоидном растворе на разной глубине, Ж. Перрен в 1909 году рассчитал его, пользуясь (5.54). В этом уравнении массу одной молекулы следует заменить через число Авогадро и массу моля вещества по (5.6).

5.8. Распределение молекул по скоростям

Это распределение называют *распределением Максвелла*. Оно было получено Д. К. Максвеллом в 1859 году для идеального газа, молекулы которого обладают только кинетической энергией и не испытывают действия каких либо сил.

Чтобы получить это распределение, воспользуемся понятиями теории вероятности, которые введены в разделе 5.3 и проиллюстрированы на примере определения вероятности найти в аудитории студента, возраст которого попадает в определённый, заранее выбранный интервал. Теперь случайной величиной будет не возраст студента, а скорость молекулы. Искомой величиной будет *функция распределения молекул по скоростям*. Поскольку скорости молекул различны и случайным образом изменяются в результате их соударений, то найти в молекулу с точно заданной скоростью практически невозможно. Поэтому введём интервал dv скоростей, и будем искать молекулу, имеющую скорость, значение которой

принадлежит этому интервалу. Очевидно, вероятность встретить такую молекулу должна быть пропорциональна ширине интервала, то есть будет иметь место равенство, подобное (5.25):

$$\frac{dN}{N} = f(v)dv, \quad (5.56)$$

где N — общее число молекул; dN — число молекул, скорость которых попадает в интервал скоростей от v до $v + dv$; $f(v)$ — функция распределения молекул по скоростям.

Очевидно, что в рассматриваемом газе будут молекулы как очень быстрые, так и очень медленные, но таких молекул мало, и вероятность их встретить мала. Значит, должно быть мало и значение функции распределения в области этих скоростей. Поскольку вероятность пропорциональна функции распределения, то зависимость этих величин от скорости должна иметь максимум. Эта кривая будет иметь две ветви — восходящую и нисходящую, подобно той, которая изображена на рис. 5.5.

Теперь подберём функцию распределения. Ясно, что она должна состоять из произведения двух членов. Один должен возрастать с ростом скорости, давая восходящую ветвь кривой, а второй — уменьшаться. Подберём подходящие зависимости. Пусть функция распределения возрастает пропорционально квадрату скорости, а уменьшается по экспоненте. Вид последней можно определить, воспользовавшись распределением Больцмана (5.54), заменив в нём потенциальную энергию одной молекулы на её кинетическую энергию:

$$f(v) = Bv^2 e^{-\frac{E_K}{kT}} \quad \text{или} \quad f(v) = Bv^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}. \quad (5.57)$$

Полученное нами равенство отличается от того, которое даёт строгий вывод, только постоянными коэффициентами, которые в нашем уравнении заменяет один коэффициент B . Но любой вывод требует экспериментального подтверждения. В нашем случае это возможно, если с помощью полученного распределения мы сможем рассчитать какую-либо скорость, а затем определить её на опыте.

5.9. Характерные скорости молекул

Найденное нами выше распределение описывает кривую с максимумом, положение которого на оси скоростей легко находится методами математического анализа. Для этого нужно взять производную от функции распределения по единственной содержащейся в ней переменной — скорости, и приравнять её нулю. Для краткости записи введём обозначение для всех постоянных величин в показателе степени:

$$\frac{m_0}{2kT} = \alpha. \quad \text{Тогда} \quad f(v) = Bv^2 e^{-\alpha v^2}. \quad (5.58)$$

Производная по скорости от функции распределения (5.59)

$$\frac{df(v)}{dv} = 2Bv e^{-\alpha v^2} - Bv^2 2\alpha v e^{-\alpha v^2}. \quad (5.59)$$

Приравняв её нулю и сократив постоянные множители, определим v_H — *наивероятнейшую скорость* теплового движения молекул:

$$1 - \alpha v_H^2 = 0, \text{ и } v_H = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}. \quad (5.60)$$

Подставив значение α из (5.58), получим

$$v_H = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}. \quad (5.61)$$

Этому значению скорости соответствует максимум кривой $f(v)$ (рис. 5.14). Чем выше температура, тем больше наивероятнейшая скорость — при увеличении температуры максимум функции распределения сдвигается вправо.

Если на оси v выделить интервал скоростей, то заштрихованная площадь будет определять относительное число молекул, принадлежащих этому интервалу. Это становится очевидным, если $f(v)$ заменить через её значение непосредственно по определению функции распределения (5.25). Вместе с тем, относительное число молекул — это и есть вероятность.

Выделив на оси v несколько равных интервалов скоростей, нетрудно убедиться, что вероятность встретить молекулу в интервале вблизи v_H будет максимальна, как максимально и число молекул, принадлежащих этому интервалу. Поэтому скорость v_H и называют *наивероятнейшей скоростью*.

Вторую характерную скорость получим из основного уравнения молекулярно-кинетической теории (5.40):

$$\left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle = \frac{3kT}{2} \quad \text{и} \quad \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = v_{\text{ср}}. \quad (5.62)$$

Заметим, что более строгий вывод, нежели тот, что приведён выше, позволяет получить этот же результат на основе распределения Максвелла (5.57).

Полученная выше скорость носит название средней квадратичной, поскольку она равна корню квадратному из среднего квадрата скорости. Среднеквадратичная скорость несколько больше наивероятнейшей. Положение её нетрудно найти на рис. 5.14.

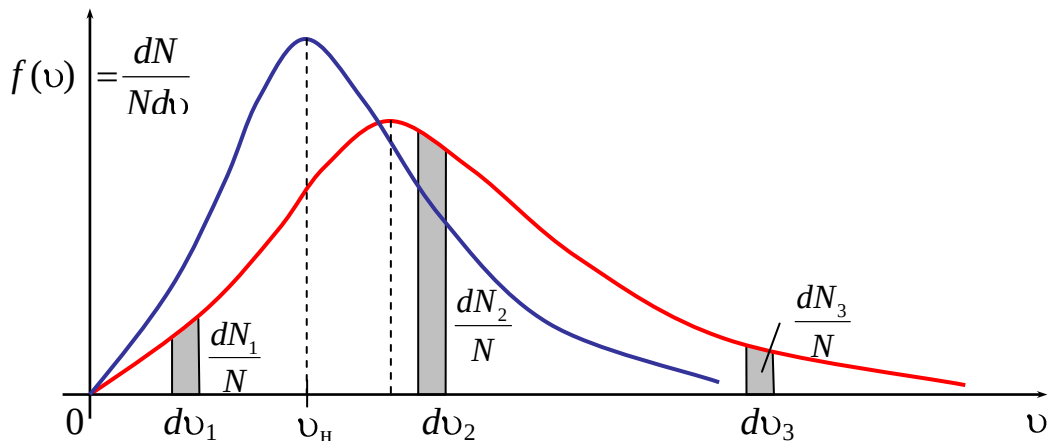


Рис. 5.14

Ещё одна характерная скорость — это *средняя скорость* теплового движения молекул

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}. \quad (5.63)$$

Средняя скорость делит площадь под кривой $f(v)$ (см. рис. 5.14) на две равные части: половина молекул имеют скорости меньше $\langle v \rangle$, другая половина — больше $\langle v \rangle$.

Из формул (5.61), (5.62) и (5.63), определяющих характерные скорости молекул в идеальном газе, видно, что наименьшая из них — это наивероятнейшая скорость, а наибольшая — среднеквадратичная: $v_n < \langle v \rangle < v_{\text{ск}}$.

Характерные скорости получены с помощью законов *статистической физики*, которая изучает поведение систем, состоящих из очень большого числа беспорядочно движущихся частиц. Такое хаотическое движение не исключает, а скорее предполагает возможность отклонения от средних значений: в одном малом объёме газа средняя энергия частиц, например, может оказаться несколько больше, чем в соседнем. Отклонения от среднего носят название *флуктуаций*. Так, в отдельных микрообъёмах земной атмосферы концентрация молекул не совсем одинакова, поэтому имеют место неоднородности — флуктуации плотности. Этими флуктуациями и обусловлен голубой цвет неба, поскольку неоднородности имеют такие размеры, что наибольшее рассеяние на них претерпевает именно голубая часть спектра белого света, идущего от Солнца.

Законы статистики — это законы, справедливые для больших чисел, с возможностью отклонения от законов в ту, либо в другую стороны, причём, чем больше частиц в системе, тем менее вероятны большие отклонения от средних величин. Статистический характер законов свидетельствует о проявлении закономерностей лишь для совокупности большого числа молекул, в то время, как параметры движения каждой отдельной молекулы случайны, то есть не закономерны.

5.10. Опыт Штерна

В начале нашего столетия, в связи с развитием радиоэлектроники и необходимостью рассчитывать эмиссию электронов из нагретых катодов вакуумных электронных ламп, максвелловское распределение по скоростям (5.57) приобрело практическое значение. Кроме того, и техника эксперимента стала достаточно совершенной, чтобы иметь возможность проверить правильность теоретически выведенного распределения молекул по скоростям.

В 1920 г. Штерн осуществил следующий опыт: по оси двух коаксиальных цилиндров была протянута тонкая серебряная проволока, которая нагревалась электрическим током так, что атомы серебра испарялись и образовывали вокруг нити пар (рис. 5.16).

Молекулы пара, оседая на стенках внутреннего цилиндра, покрывали бы его равномерным слоем. Но во внутреннем цилиндре параллельно его оси была сделана узкая прорезь, по всей длине цилиндра. Через эту щель молекулы серебра вырывались за стенки внутреннего цилиндра и откладывались на внешнем цилиндре узкой полоской напротив щели.

Если цилиндры привести во вращение с постоянной угловой скоростью ω , полоска из атомов серебра на стенке внешнего цилиндра должна сместиться противоположно направлению вращения, потому что молекуле, летящей со скоростью v , требуется время $t = l/v$, чтобы пролететь расстояние l между цилиндрами. За это время цилиндры успеют повернуться на угол $\varphi = \omega t$, и полоска из осевших на внешнем цилиндре атомов серебра сместится на угол

$$\varphi = \omega \frac{l}{v}. \quad (5.64)$$

Поскольку скорости молекул различны, то и отклонятся они все на разные углы. В результате молекулы, осевшие на стенке внешнего цилиндра, окажутся рассортированными по скоростям: быстрые молекулы сместятся на малый угол от полоски, полученной при неподвижных цилиндрах. Медленным же молекулам будет соответствовать большой угол. Естественно, что толщина слоя молекул будет определяться их числом. Очень быстрых и очень медленных молекул должно быть мало, значит, и толщина слоя будет максимальна где-то посередине, там, где угол соответствует наивероятнейшей скорости. Величину этого угла нетрудно измерить, и по формуле (5.64) рассчитать величину наивероятнейшей скорости.

Напомним, что распределение Максвелла было получено подбором функций, дающих кривую, соответствующую нашим представлениям о характере теплового движения молекул в газе. Опыт, проведённый спустя полвека после того, как было получено распределение, подтвердил соответствие теоретического и действительного распределения молекул.

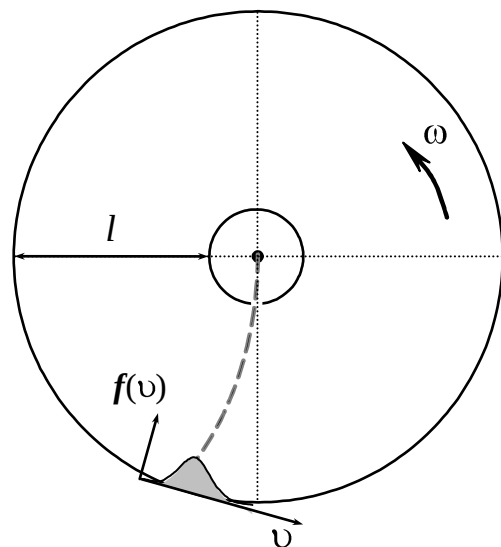


Рис. 5.16

5.11. Явления переноса

Хаотическое движение молекул приводит к таким физическим явлениям, как *вязкое трение, диффузия, теплопроводность*. Эти явления называются *явлениями переноса* и наблюдаются только тогда, когда нарушается равновесие в системе, состоящей из большого числа беспорядочно движущихся частиц (молекул). При равновесии значения параметров одинаковы во всех точках системы в любой момент времени.

Нарушение равновесия означает появление в газе (жидкости) *неоднородностей* макроскопических параметров. Например, *вязкое* или *внутреннее трение* — это трение между слоями газа или жидкости, движущимися относительно друг

друга. Наличие разницы в скоростях направленного движения слоёв газа или жидкости приводит к появлению силы трения между ними.

Если в газе где-то появляются молекулы иного вещества, концентрация которого не однородна по объёму, то происходит *диффузия* молекул этого вещества, приводящая к выравниванию концентраций. Наконец, если в объёме газа существует перепад температур, то происходит передача тепла от более нагретого слоя газа или жидкости к соседнему, более холодному слою, то есть имеет место *теплопроводность*.

Степень неоднородности трёх макроскопических параметров — скорости направленного движения, концентрации, температуры — может быть разной. Чтобы количественно охарактеризовать степень неоднородности, вводится величина, называемая *градиентом*. Градиент температуры, например, показывает, насколько меняется температура при изменении координаты вдоль оси x на единицу дли-

ны, то есть градиент температуры $\frac{dT}{dx}$ равен отношению приращения температу-

ры (dT) к приращению координаты (dx). Наличие градиента приводит к тому, что молекулы, участвуя в тепловом движении и перелетая из одного слоя в другой, и обратно, несут с собой и характерные различия этих слоёв: при *разности тем-*

ператур они несут разные энергии теплового движения $\frac{i}{2}kT$; при *разности ско-*

ростей $\vec{u}$ направленного движения — разные импульсы $m_0\vec{u}$, и наконец, при *раз-*
ных концентрациях число перелетевших во встречных направлениях молекул, и, следовательно, перенесённые массы будут разными. Разность концентраций Δn заменяют обычно на разность плотностей $\Delta \rho = m_0 n_2 - m_0 n_1 = m_0 \Delta n$

Перенос каждой молекулой какой-либо из своих характеристик приводит к макроскопическому результату: при диффузии переносится *масса* вещества, а при теплопроводности — *энергия*. Перенос молекулами своего суммарного *импульса $\vec{K}$* упорядоченного движения является причиной появления между движущимися слоями силы трения (сопротивления). В приведённой ниже табл. 5.3 представлено краткое обобщение вышесказанного.

Таблица 5.3

Явление	Градиент	Что переносит молекула	Макрорезультат
Диффузия	$\frac{d\rho}{dx}$	m_0	ΔM
Теплопроводность	$\frac{dT}{dx}$	$\frac{i}{2}kT$	ΔQ
Внутреннее трение	$\frac{d\vec{u}}{dx}$	$m_0\vec{u}$	$\Delta \vec{K}$

В первой колонке таблицы стоит название явления переноса, во второй — градиент, характеризующий ту или иную неоднородность, существующую в газе и приводящую к возбуждению соответствующего явления переноса. Третья ко-

лонка таблицы представляет микроскопические величины, которые характеризуют каждую молекулу, перелетающую вдоль оси с имеющимся по ней градиентом. В четвертой колонке проставлен тот макроскопический результат, к которому приводит хаотичное движение молекул при наличии в газе или жидкости соответствующего градиента.

Макрорезультат зависит не только от величины градиента. Перенесённое количество прямо пропорционально площади ΔS , через которую могут перелетать молекулы, и длительности процесса – промежутку времени Δt . В соответствии с этим все три уравнения переноса имеют одинаковую структуру:

- уравнение диффузии

$$\Delta M = -D \frac{d\rho}{dx} \Delta S \Delta t; \quad (5.65-1)$$

- уравнение теплопроводности

$$\Delta Q = -\chi \frac{dT}{dx} \Delta S \Delta t; \quad (5.65-2)$$

- уравнение вязкости (внутреннего трения)

$$\Delta \vec{K} = -\eta \frac{d\vec{u}}{dx} \Delta S \Delta t. \quad (5.65-3)$$

Последнее уравнение обычно записывают несколько иначе: поделив на Δt обе части и заменив по 2 закону Ньютона $\frac{\Delta \vec{K}}{\Delta t} = \vec{F}_c$ на силу сопротивления, будем иметь *закон Ньютона* для силы трения между параллельно движущимися слоями жидкости или газа, то есть для силы сопротивления:

$$\vec{F}_c = -\eta \frac{d\vec{u}}{dx} \Delta S. \quad (5.66)$$

Уравнения переноса вошли в физику под разными названиями и могут быть записаны по-разному. Общность этих уравнений состоит в том, что при наличии определённого градиента макрорезультат можно получить, умножив соответствующий градиент на время и площадь.

Знак минус в уравнениях (5.65) указывает на то, что *поток* соответствующей величины – массы, количества теплоты и импульса – направлен противоположно градиенту, то есть в сторону уменьшения соответственно плотности, температуры и скорости направленного движения.

Коэффициенты пропорциональности в уравнениях (5.65) называются *коэффициентами переноса*: D – коэффициент диффузии; χ – коэффициент теплопроводности; η – коэффициент динамической вязкости. Коэффициенты переноса определяют интенсивность протекания процессов переноса в различных газах (жидкостях).

Задача молекулярной физики состоит в том, чтобы выяснить, рассмотрев молекулярный механизм процесса, чем определяется каждый из этих коэффициентов переноса, как его можно увеличить либо уменьшить.

5.12. Длина свободного пробега молекул в газе

Очевидно, что скорость любого процесса переноса будет зависеть от частоты столкновений молекул между собой и от расстояния, пробегаемого молекулой от одного столкновения до следующего. Это расстояние называется *длиной свободного пробега* λ . Оценим среднюю длину свободного пробега молекулы в газе.

Если молекула на пути l испытала z ударов, то средняя длина свободного пробега

$$\langle \lambda \rangle = \frac{l}{z}. \quad (5.67)$$

Для того чтобы оценить число ударов z , установим два, заведомо нереальных, положения:

- 1) все молекулы, кроме одной, неподвижны;
- 2) движущаяся молекула не изменяет ни направление, ни величину своей скорости при ударах о неподвижные молекулы.

Тогда выделенная молекула будет двигаться прямолинейно, и под её удары попадут все «неподвижные» молекулы, находящиеся в цилиндре длиной l и радиусом, равным диаметру молекул (рис. 5.17).

Те молекулы, которые находятся вне этого цилиндра, за его пределами, соударений не испытывают. Летящая молекула ударится лишь о те, которые находятся внутри цилиндра. Значит, число ударов z будет равно числу молекул N в цилиндре длиной l и поперечным сечением $\sigma = \pi d_0^2$ (d_0 — диаметр молекулы; σ — *эффективное сечение молекулы*).

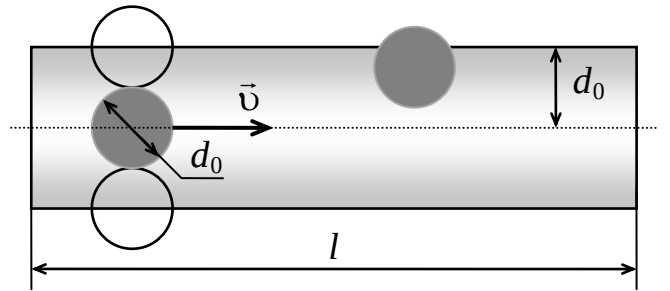


Рис. 5.17

Число молекул N в этом цилиндре найдём как произведение концентрации молекул n на объём цилиндра:

$$N = n\pi d_0^2 l = z, \quad (5.68)$$

и средняя длина свободного пробега

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\pi d_0^2 n}. \quad (5.69)$$

Результат точных расчетов, сделанных без упрощающих положений, лишь немного отличается от проведённой нами оценки:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\pi d_0^2 n \sqrt{2}}. \quad (5.70)$$

Таким образом, среднюю длину свободного пробега можно считать не зависящей от температуры.

Диаметры молекул газа составляют обычно $0,2 \div 0,3$ нм. Концентрация молекул газа при *нормальных условиях* ($p = 760$ мм рт. ст. ≈ 101 кПа; $T = 273$ К) равна $2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ (*число Лошмидта*). При таких параметрах средняя длина свободного

пробега равна приблизительно 10^{-7} м, и среднее число столкновений за секунду $\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle \lambda \rangle} \approx 10^{10} \text{ с}^{-1}$.

Поскольку концентрация молекул известным образом связана с давлением, то длина свободного пробега при неизменной температуре будет обратно пропорциональна давлению:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d_0^2 p}. \quad (5.71)$$

5.13. Внутреннее трение

Под внутренним трением мы понимаем трение между слоями движущегося газа (жидкости). У стенок сосуда (трубы), по которому течёт газ, слои движутся медленнее, чем по мере удаления от стенок, а скорость слоя, вплотную прилегающего к стенке, вообще равна нулю. Сила, действующая со стороны медленно текущего слоя и замедляющая движение быстрого слоя, называется силой внутреннего трения или силой сопротивления. Макроскопическое уравнение, определяющее эту силу, уже приведено выше. Это уравнение (5.66). Чтобы выяснить смысл коэффициента динамической вязкости η , рассмотрим молекулярно-кинетическую картину процесса, а затем, описывая хаотическое движение молекул, получим величину силы сопротивления F_c , но выраженную теперь через характеристики движения отдельных молекул.

На рис. 5.18(а) показана ось x , проведённая перпендикулярно скорости течения газа (или жидкости). Газ течёт внутри цилиндрической трубы, поэтому ось x направлена от оси трубы к её стенке. Ясно, что скорость течения газа, и, следовательно, скорость направленного движения каждой молекулы, убывает по мере приближения к стенке, что иллюстрируется графиком, приведённым на рис. 5.18(б). Через ΔS на рисунке 5.18(а) обозначена выделенная площадь соприкосновения слоёв, имеющих скорости направленного движения u_1 и u_2 .

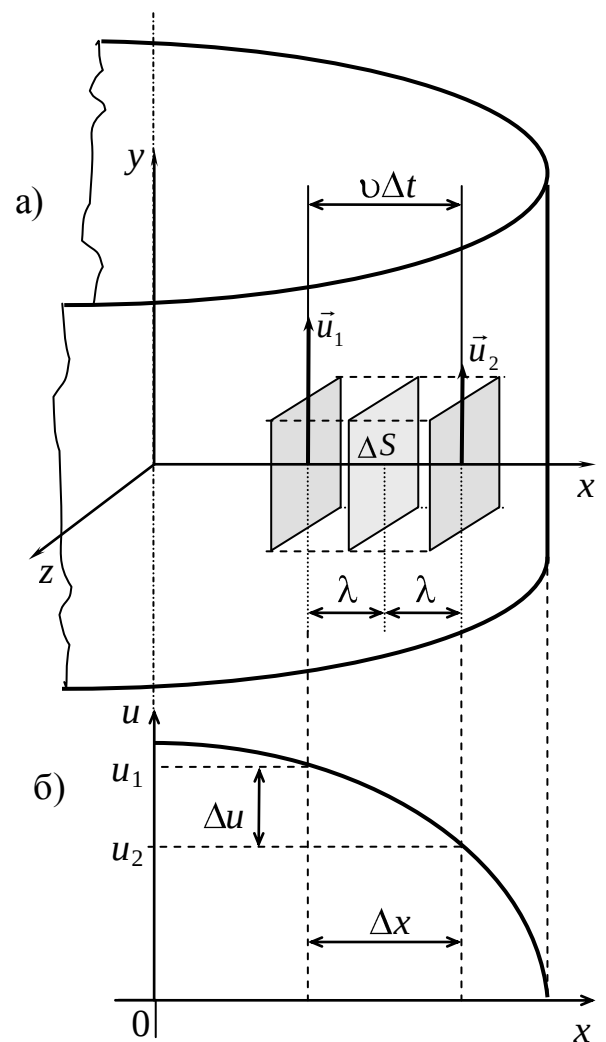


Рис. 5.18

Молекулы, двигаясь хаотично и обладая средней скоростью теплового движения v , будут перелетать из слоя в слой, перенося с собой свой импульс направленного движения.

Каждая молекула, летящая от оси вправо, несёт количество движения (импульс) $m_0 \vec{u}_1$, перелетающая влево — $m_0 \vec{u}_2$. Если обозначить число перелетающих навстречу друг другу молекул через N_1 и N_2 , то можно посчитать изменение импульса первого слоя, найдя разность между импульсом, полученным от всех *прилетевших* в слой молекул и импульсом, унесённым *улетевшими* из него молекулами. Первый будет равен по величине $m_0 u_2 N_2$, второй — $m_0 u_1 N_1$. Изменение количества движения приводит к появлению импульса силы:

$$\vec{F}_1 \Delta t = \Delta \vec{K} = m_0 (u_2 N_2 - u_1 N_1), \quad (5.72)$$

где $\vec{F}_1$ — сила, подействовавшая на первый слой. Как следует из последнего уравнения, она направлена *против течения*, так как скорость $u_1 > u_2$. Сила $\vec{F}_2$, подействовавшая при этом на второй слой, будет равна силе $\vec{F}_1$ по модулю, но направлена противоположно, то есть *по течению*.

Чтобы найти изменение импульса $\Delta \vec{K}$ первого слоя за время Δt , необходимо посчитать число молекул, перелетающих за это время из слоя в слой. Прежде, чем приступить к этому расчёту, отметим следующее: вдоль оси x скорость направленного движения меняется от точки к точке, то есть в соседних точках оси x скорости разные. Обозначим буквой u скорость направленного движения газа в произвольной точке оси x . Условимся, что u_1 — это скорость слоя, отстоящего на расстоянии λ (для упрощения записи угловые скобки в обозначении средней длины свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ опускаем) от ΔS — площадки, через которую осуществляется перелёт молекул (см. рис. 5.18). Если u_2 отстоит от ΔS тоже на λ , то можно считать, что молекулы перелетают из слоя в слой без столкновений. Это значит, что они, перелетая, не теряют скорость направленного движения в результате соударений с другими молекулами.

Очевидно, что через площадку ΔS за Δt секунд перелетят те молекулы, которые имеют скорость хаотического теплового движения, направленную вдоль оси x . Так как все направления хаотического движения равноправны, то возможны шесть движений молекулы (три оси и два направления у каждой). Следовательно, вдоль оси в нужном направлении будет двигаться только 1/6 часть всех молекул. Поскольку средняя скорость движения молекул ограничена, то за время Δt сквозь площадку ΔS смогут пролететь и достичь другого слоя лишь те молекулы, которые находятся достаточно близко, а именно, находящиеся на расстоянии $v \Delta t$ от другого слоя (см. рис. 5.18). Это будут молекулы, содержащиеся в объёме $v \Delta t \Delta S$. Их число мы найдём, умножив этот объём на концентрацию n . И, наконец, в заданном направлении будет двигаться 1/6 часть общего числа молекул. Следовательно, число перелетевших молекул

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{6} v \Delta t \Delta S n. \quad (5.73)$$

Тогда изменение количества движения слоя за время Δt

$$\Delta \vec{K} = m_0 \frac{1}{6} v \Delta t \Delta S n (\vec{u}_1 - \vec{u}_2). \quad (5.74)$$

Так как градиент — это производная от скорости по перпендикулярной ей координате x , а расстояние Δx , которое разделяет слои, равно 2λ , то разность скоростей $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ можно найти по градиенту скорости, используя формулу Лагранжа для конечных приращений ($\Delta y = (y_2 - y_1) \approx y' \Delta x$):

$$(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \approx - \frac{d\vec{u}}{dx} 2\lambda. \quad (5.75)$$

Тогда

$$\Delta \vec{K} = - \frac{1}{6} m_0 v \Delta t \Delta S n \frac{d\vec{u}}{dx} 2\lambda, \quad (5.76)$$

или

$$\vec{F} = - \frac{1}{3} v \lambda m_0 n \frac{d\vec{u}}{dx} \Delta S. \quad (5.77)$$

Сравнивая этот результат с силой вязкости (5.66), выраженной через макропараметры, и произведя сокращения, будем иметь для коэффициента динамической вязкости газа выражение:

$$\eta = \frac{1}{3} v \lambda m_0 n = \frac{1}{3} v \lambda \rho. \quad (5.78)$$

Напомним, что здесь $\lambda = \langle \lambda \rangle$ — это средняя длина свободного пробега, а $v = \langle v \rangle$ — средняя скорость теплового движения молекул; $\rho = m_0 n$ — плотность газа.

Последняя формула даёт возможность разобраться, от каких параметров будет зависеть вязкость газа. Так, с повышением температуры она должна возрастать из-за того, что скорость теплового движения пропорциональна $\sqrt{T}$. В жидкостях мы наблюдаем как раз обратное: при охлаждении жидкости делаются более вязкими. Это противоречие на первых порах принималось как свидетельство ошибочности молекулярно-кинетической теории. Но более поздние опыты, проведённые с газами, показали, что температурная зависимость для газов как раз обратна той, что имеет место для жидкостей, и вязкость газов действительно увеличивается при повышении температуры. Для жидкостей выражение (5.78) несправедливо, поскольку при его выводе не учтены характерные особенности движения молекул в жидкостях.

5.14. Диффузия

Это явление переноса имеет место в том случае, когда молекулы одного вещества попадают в другое вещество и, благодаря хаотичному движению, начинают в нём распространяться. Например, любой газ может постепенно распространяться в другом газе, молекулы одной жидкости благодаря диффузии (проникновению) перемешиваются с молекулами другой жидкости. Наконец, диффузия имеет место и в твёрдых телах, только её скорость существенно меньше, чем

в жидкостях и, тем более, в газах. Если твёрдое тело имеет пористую структуру, в нём хорошо диффундирует газ.

Диффузия приводит к *переносу массы* вещества в направлении уменьшения плотности ρ . Первое из уравнений (5.65) есть макроскопическое уравнение диффузии. Так же, как и в предыдущем случае (внутреннее трение), для выяснения смысла входящего в него коэффициента диффузии найдём перенесенную за время Δt массу ΔM , рассматривая хаотичное движение молекул, перелетающих через площадку ΔS по оси x и *против* неё (рис. 5.19).

На рис. (5.19б) показано, что вдоль этой оси плотность ρ газа уменьшается, а на рисунке (5.18а) – что диффузия имеет место лишь через площадку ΔS . Через ρ_1 и ρ_2 обозначены плотности в точках, находящихся от площадки на расстоянии, равном средней длине свободного пробега $\langle \lambda \rangle$.

В силу хаотичности движения молекулы будут перелетать в обоих направлениях оси x , перенося с собой свою массу. Тогда общая масса, перенесённая через площадку ΔS за Δt секунд, будет:

$$\Delta M = m_0 N_1 - m_0 N_2, \quad (5.79)$$

где N_1 и N_2 – число молекул, перелетающих в разных направлениях через площадку ΔS за этот промежуток времени, а m_0 – масса каждой из них. Величина N_1 не равна N_2 , так как вдоль оси x меняется концентрация молекул, пропорциональная плотности:

$$N_1 = \frac{1}{6} v \Delta t \Delta S n_1; \quad N_2 = \frac{1}{6} v \Delta t \Delta S n_2. \quad (5.80)$$

Подставляя эти значения в (5.78), получаем

$$\Delta M = m_0 \frac{1}{6} v \Delta t \Delta S (n_1 - n_2). \quad (5.81)$$

Разность концентраций может быть заменена через разность плотностей, так как очевидно, что плотность

$$\rho = m_0 n. \quad (5.82)$$

Тогда

$$\Delta M = \frac{1}{6} v \Delta t \Delta S (\rho_1 - \rho_2). \quad (5.83)$$

Используя формулу конечных приращений, выразим разность плотностей через градиент плотности ($\Delta \rho \approx \rho' \Delta x$):

$$\rho_1 - \rho_2 = -\frac{d\rho}{dx} 2\lambda, \quad (5.84)$$

и теоретическое уравнение для перенесенной массы примет вид:

$$\Delta M = -\frac{1}{3} v \lambda \frac{d\rho}{dx} \Delta S \Delta t. \quad (5.85)$$

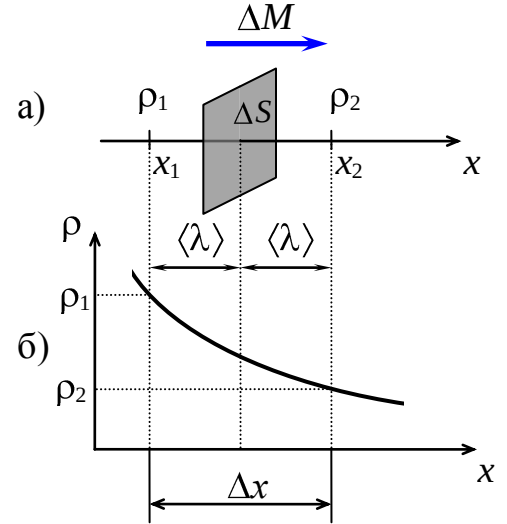


Рис. 5.19

Сопоставив полученное равенство с первым уравнением в (5.65), получим выражение для коэффициента диффузии:

$$D = \frac{1}{3} v \lambda. \quad (5.86)$$

Поскольку средняя скорость хаотичного движения молекул зависит от температуры и от массы молекулы, то и коэффициент диффузии должен зависеть от этих величин:

$$D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} \lambda. \quad (5.87)$$

То есть коэффициент диффузии растёт при увеличении температуры, и чем легче молекула, тем больше коэффициент диффузии.

На том факте, что легкие молекулы диффундируют быстрее, основано действие диффузионного насоса. Этот насос включается после того, как обычный поршневой насос уже создал в сосуде низкое давление (форвакуум). Принцип действия диффузионного насоса заключается в следующем: откачиваемый воздух продувается так, что рядом с ним, отделённые пористой перегородкой, находятся пары ртути. Коэффициент диффузии для ртути намного меньше, чем для молекул воздуха из-за большой массы атомов ртути. Поэтому ртуть практически не успевает диффундировать в ту часть сосуда, где находится откачиваемый воздух. Молекулы же воздуха постепенно диффундируют сквозь пористую перегородку в пары ртути и удаляются вместе с ней.

Ещё одно применение явления диффузии – это *диффузионный метод разделения изотопов*. Изотопами называют атомы, имеющие один порядковый номер, но различающиеся массой своего ядра (атома). Так как номер химического элемента в таблице Менделеева равен числу протонов в ядре атома, то заряд ядра у всех изотопов одного химического элемента один и тот же. Число электронов в атоме равно числу протонов, и, следовательно, изотопы идентичны по своим химическим свойствам. Поэтому разделить их с помощью химических реакций невозможно. Но если смесь изотопов привести в газообразное состояние и продувать через сосуд с пористой перегородкой, за которой вакуум, то лёгкий изотоп диффундирует в свободную часть сосуда в большем количестве, чем тяжёлый изотоп. Многократное повторение процесса приведёт к практически полному отделению легких изотопов от более тяжелых.

Проблема разделения изотопов приобрела решающее значение в 40-х годах XX века в связи с необходимостью осуществления *реакции деления* ядер урана. Природный уран на 99,3% состоит из неделящегося изотопа U^{238} , тогда как для реакции деления требуется изотоп U^{235} , которого в ядерном топливе должно быть минимум 3÷4%. Так, первая в мире атомная электростанция, запущенная в г. Обнинске в 1954 году, использовала в качестве топлива обогащённый уран U^{238} с 5% U^{235} . Одним из реальных способов увеличения процентного содержания U^{235} и является метод диффузии сквозь пористые перегородки.

Урановая проблема, кроме разделения изотопов самого урана, потребовала и получения "тяжелой" воды (химическая формула D_2O , где D_2 — дейтерий, то есть

тяжелый изотоп водорода) путём отделения её от обычной, "легкой" воды (H_2O). В природных водах содержится приблизительно 0,03% тяжелой воды. Процесс отделения тяжёлой воды от обычной очень энергоёмкий, поэтому литр тяжёлой воды стоит около 250 долларов США.

5.15. Теплопроводность

Макроскопическое уравнение теплопроводности дано вторым в эмпирических уравнениях переноса (5.65). Необходимый для вывода коэффициента теплопроводности χ рис. 5.20 аналогичен предыдущему рисунку. Так же, как при диффузии, на нём показано изменение величины, неоднородность которой является причиной переноса количества теплоты в веществе. В нашем случае это температура T газа, которая в направлении оси x уменьшается (см. рис. 5.20б).

Пусть T_1 и T_2 – температуры газа в точках, находящихся на оси x справа и слева от площадки ΔS на расстоянии средней длины свободного пробега λ от неё. Тогда вправо через ΔS будут перелетать молекулы, сохранившие из-за отсутствия столкновений свою кинетическую энергию $\frac{i}{2}kT_1$, а в противоположном направлении пере-

летят молекулы с энергией $\frac{i}{2}kT_2$. Очевидно, что

перенесённое через площадку ΔS количество теплоты ΔQ будет равна разности суммарных энергий, перенесённых молекулами в противоположных направлениях:

$$\Delta Q = N_1 \frac{i}{2}kT_1 - N_2 \frac{i}{2}kT_2. \quad (5.88)$$

Число молекул N_1 , перелетевших за Δt секунд площадку ΔS в положительном направлении оси, казалось бы, должно отличаться от числа молекул N_2 , перелетевших в обратном направлении:

$$N_1 = \frac{1}{6}v_1 \Delta t d \Delta S n; \quad N_2 = \frac{1}{6}v_2 \Delta t d \Delta S n. \quad (5.89)$$

Но скорости теплового движения v_1 и v_2 находятся по основному уравнению молекулярно-кинетической теории:

$$v_1 = \sqrt{\frac{3kT_1}{m_0}}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{3kT_2}{m_0}}, \quad (5.90)$$

то есть по сравнению с температурами их различия будут иметь второй порядок малости. Поэтому можно считать, что $v_1 \approx v_2 = v$. Тогда

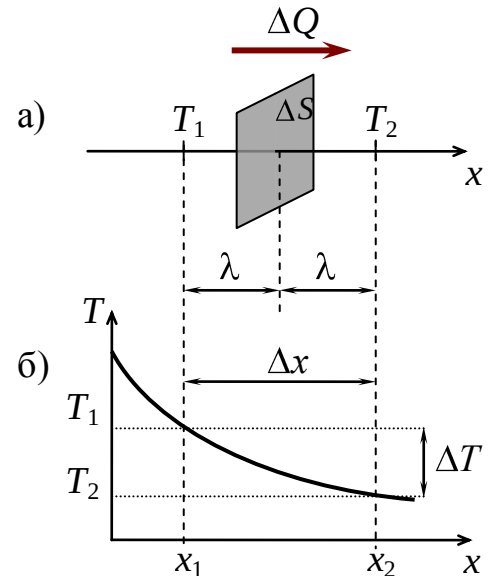


Рис. 5.20

$$\Delta Q = \frac{1}{6} v \Delta t \Delta S n \frac{i}{2} k (T_1 - T_2), \quad (5.91)$$

и, поскольку (см. предыдущий параграф) разность температур

$$T_1 - T_2 = -\frac{dT}{dx} 2\lambda, \quad (5.92)$$

то окончательно получим:

$$\Delta Q = -\frac{1}{3} v \lambda n \frac{i}{2} k \frac{dT}{dx} \Delta S \Delta t. \quad (5.93)$$

Сравнивая полученное выражение с уравнением (5.65-2), найдём коэффициент теплопроводности:

$$\chi = \frac{1}{3} v \lambda n \frac{i}{2} k. \quad (5.94)$$

Как и в двух предыдущих случаях, коэффициент оказался зависящим от средней скорости хаотического движения молекул, то есть от температуры и массы одной молекулы. Зависимость от температуры для всех трёх явлений одинакова: повышение температуры увеличивает коэффициенты переноса, то есть делает процесс переноса более интенсивным, что представляется вполне логичным, поскольку сами явления переноса обусловлены хаотичным движением.

Кроме температуры, на теплопроводность должна оказывать влияние масса молекулы, которая также определяет скорость хаотического движения. Газ, молекулы которого имеют большую массу m_0 , будет обладать малой теплопроводностью, и наоборот. Эта зависимость позволяет подобрать газ, наилучшим образом отводящий тепло от нагретого тела. Из теории следует, что самой эффективной охлаждающей газовой средой должен быть водород, что и подтверждается на опыте.

В коэффициент теплопроводности входит произведение средней длины свободного пробега λ на концентрацию молекул n . Эти две величины следует рассматривать именно вместе, поскольку длина свободного пробега обратно пропорциональна концентрации. Очевидно, что в их произведении концентрация сокращается, то есть коэффициент теплопроводности оказывается не зависящим от нее. Однако, это справедливо лишь до определённого предела.

При малых концентрациях длина свободного пробега возрастает настолько, что молекулы летят от одной стенки сосуда до другой, *не испытывая столкновений*. Естественно, в сосудах разных размеров это наступает при разных концентрациях. Как только будет достигнута соответствующая для данного сосуда концентрация молекул, длина свободного пробега становится постоянной и не зависит от дальнейшего понижения концентрации: теперь длина свободного пробега определяется только расстоянием между стенками сосуда: $\lambda = d$.

При постоянстве λ снижение концентрации уменьшает коэффициент теплопроводности, а этого и следует добиваться в термостатах — сосудах, в которых длительное время сохраняется постоянная температура. Такие сосуды носят название сосудов Дьюара, а в жизни получили название термосов. Стенки у них двойные и между ними воздух откачан до той концентрации, чтобы длина сво-

бодного пробега (5.70) была больше расстояния между стенками. Замерив (в разбитом!) термосе это расстояние d , вы без труда оцените концентрацию молекул воздуха между стенками, а по ней и давление $p = nkT$.

5.16. Твёрдое тело

Простота модели идеального газа — это следствие пренебрежимо малого взаимодействия между его молекулами. Поэтому оказалось возможным построение общего для разных газов уравнения состояния (5.14). Практически нигде мы не учитывали индивидуальные свойства отдельного атома. В конденсированных состояниях вещества — в жидкостях и в твёрдых телах — учёт взаимодействия атомов и молекул между собой играет первостепенную роль, и это взаимодействие индивидуально для каждого сорта атомов. *Задачей молекулярной физики для этих агрегатных состояний является получение свойств как твёрдого тела, так и жидкости из свойств атома каждого конкретного вещества.* Эта задача очень сложна и выполнена пока лишь для очень небольшого класса веществ, например, для ионных кристаллов.

Поскольку при малых расстояниях между атомами и, тем более, внутри атома законы классической физики уже не применимы, молекулярная физика конденсированных сред должна быть *квантовой*. Развитие этого раздела физики началось в середине двадцатого века и привело к ощутимым результатам, о которых теперь знает каждый. Речь идёт об уникальных свойствах полупроводников и о связанной с ними твердотельной электронике, которая теперь проникла в нашу жизнь и даже быт и существенно их изменила.

Попытаемся составить первые, самые простые, представления об этом разделе физики. Прежде всего, уточним, что сегодня мы знаем о строении жидкостей и твёрдых тел, в чём заключается их сходство и различие.

Твёрдые тела сохраняют свою форму, поскольку взаимодействие между атомами достаточно велико, и каждый атом имеет своё положение равновесия. К твёрдым телам относят только *кристаллические* вещества, например, металлы и сплавы. Есть еще так называемые полные кристаллы типа калийной соли. Твёрдые тела обладают такими свойствами как *прочность, твёрдость, хрупкость, упругость*. Для каждого металла и полного кристалла характерен свой строгий геометрический порядок в расположении атомов, иначе говоря, свой тип *кристаллической решётки*.

На рис. 5.21 показаны кристаллические решётки двух типов: *простая кубическая* и *гексагональная*. В виде простой кубической решётки кристаллизуются, например, атомы меди. В таком же геометрическом порядке располагаются атомы натрия и хлора в кристаллах каменной соли, чередуясь друг с другом. Латунь — сплав меди и цинка — имеет кубическую *объёмно-центрированную* решётку. В вершинах куба располагаются атомы меди, а в центре куба находится атом цинка. Существуют также *гранецентрированные* решётки, когда в центре каждой грани находятся те же атомы, что и в вершинах куба, либо атомы другого вещества. Все

эти типы решёток симметричны, а свойства кристаллов по различным направлениям одинаковы. Такие кристаллы называют *изотропными*.

Вещества, у которых свойства кристаллов по разным направлениям не одинаковы, называют *анизотропными*. Такими свойствами обладают элементы, атомы которых образуют *гексагональную* кристаллическую решётку. Гексагональную структуру имеет, например, кристаллическая решётка цинка.

Известно, что углерод имеет две модификации, разительно отличающиеся по своим свойствам — *графит* и *алмаз*, что объясняется различием их кристаллической структуры. В алмазе атомы углерода образуют *кубическую* решётку, а в графите — *гексагональную*. В результате алмаз — это самый твёрдый природный минерал, а графит, наоборот, один из самых мягких минералов. Оба этих вещества состоят из одинаковых атомов и существуют в природе в двух устойчивых состояниях. Эти состояния называют *аллотропными*. Кристаллов с аллотропными состояниями очень немного. Как правило, каждый сорт атомов имеет характерную для него кристаллическую структуру, расстояния между атомами строго определены.

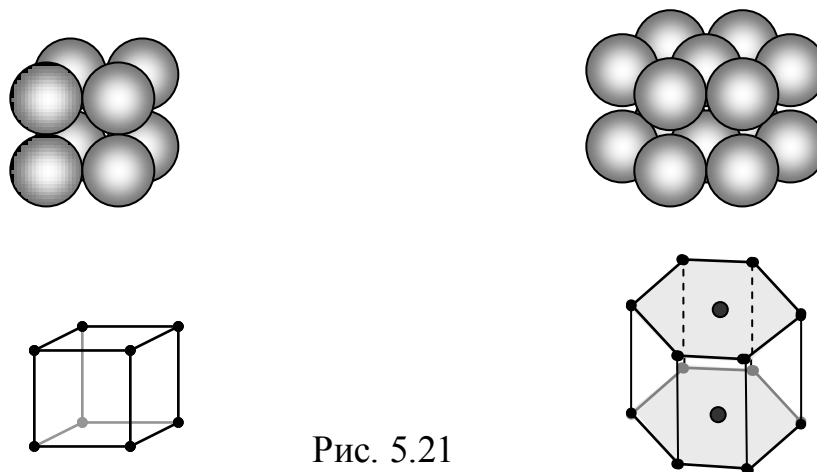


Рис. 5.21

Существование решётки доказано *рентгеноструктурным анализом*, который позволяет определить так называемую *постоянную решётки* — расстояние между центрами соседних атомов.

Поскольку это расстояние оказалась равным удвоенному радиусу атома, считается доказанной *плотная упаковка* атомов в кристалле. Это означает, что атомы располагаются вплотную друг к другу, а в обычно приводимых рисунках кристаллической решётки точками показаны не атомы, а положения их центров (см. рис. 5.21). Хаотичное движение существует и здесь, но оно — колебательное. Положения равновесия находятся в узлах решётки.

Важной характеристикой атома является его радиус. В настоящее время найдены несколько методов расчёта и опытного определения атомных радиусов. Для различных элементов они меняются в нешироких пределах: от $0,5 \cdot 10^{-10}$ м для атома водорода до $2,63 \cdot 10^{-10}$ м для атома элемента ксенона. Радиусы атомов играют существенную роль при образовании кристаллических решёток, особенно, если эта решётка формируется из атомов разного сорта. В металлургии такие ре-

шётки носят название *сплавов* (заметим, однако, что понятие сплава существенно шире данного здесь определения).

Силы, удерживающие атомы в узлах кристаллической решётки, имеют электростатическую природу, а это одни из самых больших сил, существующих в природе. Но механизм взаимодействия, объединяющего атомы, может быть разным. От этого механизма зависит сила взаимодействия между атомами, механические и электрические свойства вещества. Для характеристики механизма объединяющего взаимодействия используют понятие "*тип связи*". Простейший случай — *ионные кристаллы*. В узлах решётки в этом случае находятся ионы противоположного знака, и силы электростатического притяжения удерживают их возле друг друга. В положении равновесия сила притяжения между атомами уравновешивается силой отталкивания. Примером таких кристаллов служит поваренная соль NaCl, где атомы натрия отдают свой валентный электрон атому хлора с образованием положительного иона натрия и отрицательного иона хлора.

В металлах механизм связи несколько сложнее. В них силы притяжения возникают между положительными ионами кристаллической решётки и валентными электронами, которые в процессе кристаллизации теряют связь со своими атомами и получают возможность свободно перемещаться по всему объёму металла. Их называют *свободными электронами*. Именно они обеспечивают хорошую электропроводность металлов.

В классической теории электропроводности принято считать, что в отсутствие электрического поля свободные электроны ведут себя подобно одноатомным молекулам в идеальном газе, то есть электроны обладают тремя степенями свободы и хаотически движутся. Для обозначения системы, состоящей из свободных электронов, используют термин *электронный газ*, молекулами которого являются электроны.

Тепловое движение внутри металла складывается из колебательного теплового движения ионов кристаллической решётки и поступательного движения свободных электронов. Вопрос о том, возможно ли описать это движение с помощью известных нам законов, полученных для модели идеального газа, решается опытом. Один из примеров, касающийся теплоёмкости твёрдых тел, будет рассмотрен в следующем параграфе.

Разрушение твёрдого тела может происходить либо под действием внешних сил (механическое разрушение), либо при увеличении температуры и соответствующем увеличении амплитуды тепловых колебаний атомов. Судить о прочности конкретной кристаллической решётки можно по величине внешней силы, в результате действия которой происходит разрушение, или по температуре, при которой кристаллическая решётка распадается.

Очевидно, что первый случай наиболее важен для расчёта прочности деталей машин и строительных конструкций. Но разрушение в этом случае зависит от очень многих факторов, и теория его не может считаться завершённой.

Разрушение решётки теплом — это *плавление* твёрдого тела. Оно характеризуется в основном двумя величинами, имеющими строго определённые значения

для каждого кристаллического вещества. Это *температура плавления* и *удельная теплота плавления*.

На рис. 5.22 приведена зависимость температуры кристаллического тела от времени нагревания. По оси абсцисс отложено время, в течение которого к телу *непрерывно и с постоянной скоростью* подводится количество теплоты. На горизонтальном участке, где температура не изменяется, подводимая энергия затрачивается на разрушение кристаллической решётки. Эта температура и есть *температура плавления*. Её значения определены для очень многих веществ с различными типами кристаллической решётки, и приводятся в таблицах.

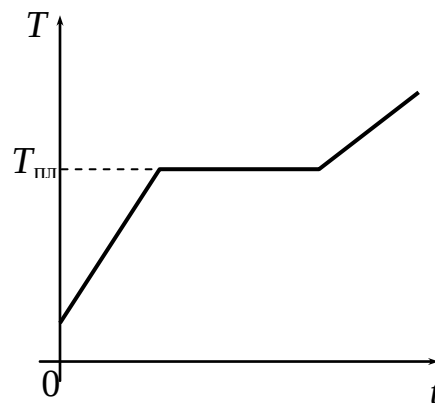


Рис. 5.22

После того, как решётка разрушена, подводимое и поглощаемое телом количество теплоты идёт на повышение температуры образовавшейся жидкости. *Удельная теплота плавления* также является характеристикой вещества, определяемой экспериментально, например, *калориметрическим методом*.

5.17. Теплоёмкость твёрдых тел

Тепловые свойства тел существенны для практики и поэтому хорошо изучены. Опытным путём определены *теплоёмкости* многих твёрдых тел с различными электрическими свойствами. Эти опыты не сложны, и поэтому включены даже в наш лабораторный практикум. Измерения показали, что теплоёмкость не зависит от того, проводит вещество электрический ток, или нет. Удивительно, но при комнатной температуре молярная теплоёмкость практически одинакова для разных кристаллических веществ.

Опыт показывает, что при комнатных температурах *молярные теплоёмкости разных твёрдых тел* — и металлов, и диэлектриков — *приблизительно одинаковы и близки к $3R$* ($R = 8,31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная). Этот опытный факт получил название *закона Дюлонга и Пти*. Выполняя лабораторную работу, вы сами убедитесь в его справедливости.

Теперь, используя найденное для идеальных газов выражение для расчёта теплоёмкости при постоянном объёме, покажем, почему этот опытный закон представляется нам удивительным.

Металлы, в отличие от диэлектриков, помимо кристаллической решётки имеют свободные электроны, движение которых подобно движению молекул идеального газа. При повышении температуры они так же, как и молекулы газа, должны увеличивать скорость хаотического движения за счёт подводимого количества теплоты. Следовательно, теплоёмкость металлов должна быть больше теплоёмкости диэлектриков на величину теплоёмкости свободных электронов:

$$c_{Me} = c_1 + c_2; \quad (5.93)$$

где c_1 – теплоёмкость кристаллической решётки; c_2 – теплоёмкость электронов.

Величина c_2 должна составить 12,5 Дж/(моль·К), то есть должна равняться теплоёмкости одноатомного газа при постоянном объёме (объём твёрдых тел при нагревании изменяется очень слабо и этим можно пренебречь).

Теплоёмкость c_1 у твёрдых тел может быть найдена по следующим соображениям: если в узлах кристаллической решётки находятся одноатомные молекулы, и их энергия только *кинетическая*, то теплоёмкость составит 12,5 Дж/(моль·К). Но атомы, "сидящие" в узлах кристаллической решётки, обладают еще и *потенциальной* энергией. В процессе колебательного движения атомов непрерывно происходит переход одного вида энергии в другой – кинетической в потенциальную и наоборот. По закону сохранения энергии кинетическая энергия должна равняться потенциальной. При нагревании кинетическая энергия атомов возрастает, следовательно, точно так же должна возрастать при этом и их потенциальная энергия.

При нагревании одного моля одноатомного газа на один градус на увеличение его кинетической энергии идет 12,5 Дж, значит, и на увеличение потенциальной энергии потребуется столько же, и *молярная теплоёмкость решётки* составит 25 Дж/(моль·К), то есть $3R$. Это и будет *молярная теплоёмкость диэлектриков*.

Для металлов следует добавить *теплоёмкость электронного газа*, которая, как и у всякого другого одноатомного газа, должна составлять $\frac{3}{2}R$, то есть 12,5 Дж/(моль·К). Следовательно, теплоёмкость металлов должна быть не $3R$, как у диэлектриков, а в полтора раза больше – $4,5R$, что находится в противоречии с законом Дюлонга и Пти, и свидетельствует, что электроны почему-то не вносят свой вклад в теплоёмкость металлов.

Происходит это потому, что свободные электроны не во всём ведут себя подобно молекулам идеального газа. Их движение определяется еще и электрическими силами связи с ядрами атомов, несмотря на то, что они свободно перемещаются по всему объёму металла. А внутри атомов энергия движения иная, нежели энергия теплового движения молекул. Она существенно больше. Поэтому повышение температуры не может на неё повлиять. Энергия электронов внутри металла при нагревании сохраняет своё прежнее значение, поэтому электроны не вносят свой вклад в теплоёмкость.

Внутри атомов движение электронов не хаотичное, электроны находятся в определённых состояниях, а их энергия меняется порциями – квантами. Изучение законов движения электронов в атоме составляет *предмет квантовой физики*. Квантовая физика позволяет рассчитывать не только тепловые, но и электрические, магнитные, оптические свойства твёрдых тел.

5.18. Жидкости

Жидкие тела, также как и твёрдые, называют *конденсированными*. И те, и другие имеют ограниченный объём, а не занимают весь объём сосуда, как газы. Это означает, что их молекулы взаимодействуют друг с другом. Притяжение, существующее между ними, не даёт им разлетаться. Но в отличие от твёрдых тел жидкости *текучи*, то есть не имеют формы, а принимают форму сосуда, в который они налиты. Очевидно, что положения равновесия молекул, строго определённые в кристаллических телах, в жидкостях не определены. Они могут перемещаться. Тепловое движение молекул в жидкостях аналогично тому, которое имеет место в твёрдых телах: это беспорядочные колебания возле своих положений равновесия, но в жидкостях положения равновесия не постоянные, как в твёрдом теле, а *временные*.

Время, в течение которого положение равновесия молекулы остаётся постоянным, называют *временем оседлой жизни молекулы*. Для каждой жидкости оно имеет своё значение. Им определяется вязкость жидкости. При большом времени оседлой жизни вязкость велика, при малом – мала. При нагревании это время уменьшается, при охлаждении растёт. Соответственно происходит изменение вязкости.

Существуют вещества, у которых время оседлой жизни очень велико. Их называют *аморфными телами, или стёклами*. По некоторым своим свойствам они отличаются от истинно твёрдых тел, к которым относят только кристаллические вещества. Класс стёкол очень обширен. Помимо известных всем прозрачных стёкол существуют ещё *металлические стёкла*, нашедшие широкое применение в промышленности, в частности в электронике. Уникальны их магнитные свойства, а оптические обычны (они не прозрачны). Все стеклообразные вещества очень хрупкие.

При повышении температуры аморфные тела просто размягчаются, у них нет ни температуры, ни теплоты плавления. На рис. 5.23 показана в виде графика зависимость температуры аморфного тела от времени нагревания при равномерном подводе тепла. В отличие от процесса нагревания кристаллического тела (см. рис. 5.22) температура аморфного тела повышается равномерно, без горизонтального участка, то есть процесс разрушения решётки не имеет места, поскольку нет самой решётки. Аморфное тело постепенно *размягчается*, и его превращение в жидкость происходит при непрерывном увеличении температуры.

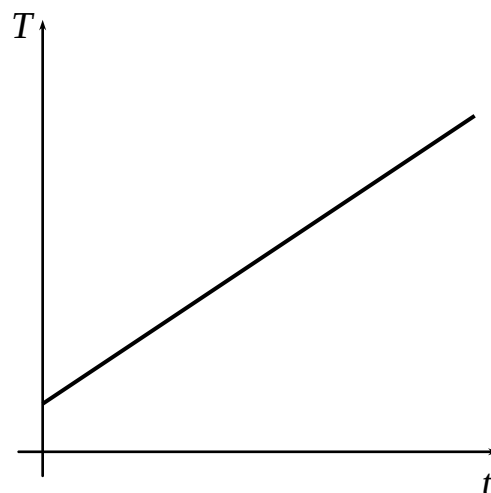


Рис. 5.23

Жидкости и аморфные тела, как правило, *изотропны*, то есть их свойства по разным направлениям одинаковы. Однако есть и такие вещества, которые в опре-

делённом интервале температур могут находиться в своеобразном состоянии, которое называют *жидкокристаллическим*. По своим механическим свойствам вещества в этом состоянии похожи на обычную жидкость. Они текучи, причём вязкость их может быть как большой, так и маленькой. Но эти вещества имеют анизотропию, которая свойственна лишь кристаллическим телам. Особенно сильно анизотропия проявляется в оптических свойствах.

Жидкокристаллическое состояние наблюдается у сложных органических веществ с большими молекулами удлинённой формы. В обычной жидкости как взаимное расположение, так и взаимная ориентация молекул хаотичны. В своём тепловом движении молекулы жидкости участвуют как в хаотичном поступательном движении, так и в хаотичном вращении. Поэтому ориентированы они произвольно. В жидком же кристалле молекулы расположены произвольно, постоянно меняют положения, но их взаимная ориентация упорядочена и не нарушается хаотичным движением. Иначе говоря, хаотично только поступательное движение, но не вращение.

Наиболее простой пример – жидкость из молекул палочкообразной формы. Они могут свободно перемещаться в пространстве, оставаясь параллельными друг другу. Возможность незатруднённого поступательного движения обуславливают жидкостные свойства вещества — его текучесть. Упорядоченная ориентация молекул приводит к анизотропии вещества: свойства его в направлении *вдоль* палочкообразных молекул будут иными, нежели по другим направлениям. С помощью электрического или магнитного поля можно изменять ориентацию молекул, что влияет на их оптические свойства. Именно эта зависимость позволяет использовать жидкие кристаллы вместо электронно-лучевых трубок в плоских компьютерных дисплеях и в жидкокристаллических телевизорах.

6. ТЕРМОДИНАМИКА

6.1. Предмет и методы термодинамики

Термодинамика изучает количественные закономерности преобразования энергии в различных процессах (механических, тепловых, электромагнитных и др.), обусловленного хаотическим тепловым движением молекул.

При этом она не касается микроструктуры изучаемых объектов и происходящих в них микропроцессов.

Термодинамика возникла как раздел физики, изучающий процессы превращения теплоты в работу. Первое знакомство с этими процессами у нас состоялось в главе 5.2, где мы рассмотрели опытные газовые законы и ввели понятие о циклических процессах. Циклические процессы используются во всех устройствах, позволяющих получить работу за счёт сжигания топлива. В термодинамике эти устройства называются *тепловыми двигателями*. Возникновение термодинамики, как одного из важнейших разделов физики, относят к девятнадцатому веку, и она связана с такими именами как С. Карно и Р. Клаузиус. По мере развития

теплотехники термодинамика из раздела физики выделилась в самостоятельную науку — *техническую термодинамику*.

Существует также *физическая термодинамика*. Предмет её изучения чрезвычайно обширен. В ней рассматриваются тепловые, магнитные, электрические, оптические свойства вещества, находящегося в любом из трёх агрегатных состояний. Более того, термодинамика рассматривает закономерности переходов из одного состояния в другое, из одной кристаллической формы в другую. Все химические процессы также могут быть рассчитаны термодинамически.

Методов исследования в термодинамике всего два. О методе круговых процессов (циклов), о котором речь шла выше, вы получили представление в средней школе, поэтому мы его опустим. Второй метод предложен Д. Гиббсом и широко используется в современной физике. Это метод *термодинамических функций или функций состояния*. Так называют макроскопические величины, которые характеризуют состояние системы и меняются только при его изменении. Напомним, что состояние системы определяется её параметрами: давлением, объёмом, температурой. Переход системы из одного состояния в другое обязательно сопровождается изменением хотя бы одного из параметров. Ниже мы познакомимся с некоторыми термодинамическими функциями и их использованием.

Заметим, что оба метода оперируют только макроскопическими понятиями, не используя представлений о молекулярном строении вещества. Поэтому термодинамике не требуется метод гипотез. В этом состоит её отличие от молекулярной физики. Предмет же изучения обоих разделов физики один, так же, как одинаковы их исходные законы. Поэтому термодинамика и молекулярная физика дополняют друг друга, используют общие понятия. В настоящее время они слились и образовали статистическую термодинамику, в которой широко используются понятия и законы квантовой физики.

6.2. Первое начало термодинамики. Внутренняя энергия и энтальпия

Прежде всего, уточним одно из основных понятий термодинамики, которым мы пользовались и ранее, не определяя его — *внутреннюю энергию*. *Под внутренней энергией мы будем понимать суммарную кинетическую энергию теплового движения молекул и потенциальную энергию их взаимодействия друг с другом*. Средняя кинетическая энергия одной молекулы определена основным уравнением молекулярно-кинетической теории (см. уравнение (5.41)). Как показано в предыдущей главе, суммарную энергию хаотического движения всех молекул в массе газа m с учётом энергии вращения легко найти, умножив среднюю энергию одной молекулы на число молекул в этой массе газа (см. уравнение (5.44)).

Примером учёта потенциальной энергии служит расчёт теплоёмкостей твёрдых тел (см. параграф 5.17).

Как видим, понятие внутренней энергии определено уже в молекулярной физике. Поскольку *энергия теплового движения* пропорциональна абсолютной температуре газа, а *потенциальная энергия взаимодействия* зависит от расстояния между молекулами, то внутренняя энергия зависит только от параметров системы

— температуры и объёма: $U = f(T, V)$. Следовательно, внутренняя энергия является *функцией состояния* системы.

Так как в идеальном газе молекулы не взаимодействуют между собой, то сумма потенциальных энергий взаимодействия равна нулю, и внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры:

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{i}{2} \nu RT. \quad (6.1)$$

Мы видели, что при расширении газ совершает работу, которая равна интегралу от произведения давления на изменение объёма (см. формулу (5.10)). При совершении работы газ теряет часть своей внутренней энергии, как того требует закон сохранения энергии. Если же работа совершается над газом, то его внутренняя энергия возрастает.

Но изменение внутренней энергии системы может происходить и *без совершения работы*, за счёт непосредственной передачи внутренней энергии от одного тела другому. Этот процесс называют *теплопередачей* или *теплообменом*. Ту часть внутренней энергии, которая передаётся от тела с большей энергией телу с меньшей энергией, называют *количеством теплоты*. Мы будем считать эту величину положительной, если тело получает тепло, и отрицательной, если оно отдаёт его.

Ни работа, ни теплота не характеризуют состояние тела, то есть не определяют однозначно перечисленные выше параметры. Работа и количество теплоты зависят от того, при каких условиях совершался процесс, какие параметры сохранялись постоянными. Особенно наглядно иллюстрируют последнее заключение круговые процессы. После их проведения система возвращается в исходное состояние (давление, объём и температура принимают прежние значения), а произведённая работа, как правило, не равна нулю (см. рис. 5.3).

Выше мы уже отмечали, что все три рассмотренные величины связаны друг с другом законом сохранения энергии: *внутренняя энергия тела возрастает за счёт подведённого тепла, и убывает, если тело совершает положительную работу*:

$$dU = dQ - dA. \quad (6.2)$$

Это важное соотношение, известное из школьного курса физики, и есть *первое начало термодинамики*.

Записанный таким образом закон даёт возможность вычислить теплоёмкость тела (системы). Действительно, теплоёмкость тела, по определению, равна количеству теплоты, которое нужно передать телу для повышения его температуры на один градус:

$$C = \frac{dQ}{dT}. \quad (6.2)$$

Если объём тела при нагревании не изменяется, то оно не совершает работы, и *теплоёмкость тела при постоянном объёме* будет равна отношению приращения внутренней энергии к приращению температуры:

$$C_v = \frac{dU}{dT}. \quad (6.3)$$

Поскольку внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, то, продифференцировав внутреннюю энергию (6.1) по температуре при $\nu = 1$, получим молярную теплоёмкость идеального газа при постоянном объёме:

$$C_v^\mu = \frac{i}{2} R, \quad (6.4)$$

что совпадает с полученной нами ранее формулой (5.41).

Первый закон термодинамики можно записать иначе:

$$dQ = dU + dA. \quad (6.5)$$

Суть закона остаётся прежней: при тепловых процессах энергия сохраняется, если система изолирована. Если же системе сообщается некоторое количество теплоты dQ , то оно идёт на изменение dU внутренней энергии системы и на совершение системой работы dA против внешних сил.

Так как элементарная работа газа $dA = p dV$ (см. формулу (5.9)), то первое начало термодинамики (6.4) примет следующий вид:

$$dQ = dU + p dV \quad \text{и} \quad dQ = d(U + pV). \quad (6.6)$$

Стоящая в скобках сумма будет являться функцией состояния, так как её первое слагаемое U есть функция состояния, а второе слагаемое — это произведение параметров системы. Эта функция состояния носит название *энтальпии* (тепловой функции или теплосодержания):

$$H = U + pV \quad (6.7)$$

Тогда *теплоёмкость при постоянном давлении* может быть найдена как производная от энтальпии по температуре:

$$C_p = \left(\frac{dH}{dT} \right)_p. \quad (6.8)$$

В случае идеального газа произведение давления на объём для одного моля $pV = RT$, и энтальпия

$$H = U + RT. \quad (6.9)$$

Продифференцировав H по температуре, получим молярную теплоёмкость при постоянном давлении:

$$C_p^\mu = C_v^\mu + R, \quad (6.10)$$

из чего следует, что теплоёмкость вещества при постоянном давлении больше, чем при постоянном объёме.

6.3. Второе начало термодинамики. Энтропия

Введём третью термодинамическую функцию, рассмотрев следующий пример. Пусть имеется изолированная система, состоящая из нагретого металла и холодной воды (рис. 6.1). При погружении металла в воду в системе начнётся процесс теплообмена. Количество теплоты dQ_1 , отданное металлом, будет равно количеству теплоты dQ_2 , полученному водой.

Если какое-то количество теплоты принято телом, то состояние этого тела должно измениться. Хаотичность движения молекул при нагревании увеличивается, и можно сказать, что возрастает и беспорядок в системе. Обозначим физическую величину, характеризующую степень беспорядка, через S и назовём *энтропией*. Очевидно, изменение беспорядка в теле определяется не только количеством переданной теплоты, но и той температурой, при которой произошла передача тепла. Чем выше температура тела, тем меньшее влияние окажет небольшое количество добавленной или отнятой теплоты. Поэтому изменение энтропии должно быть обратно пропорционально температуре, при которой произошла теплопередача:

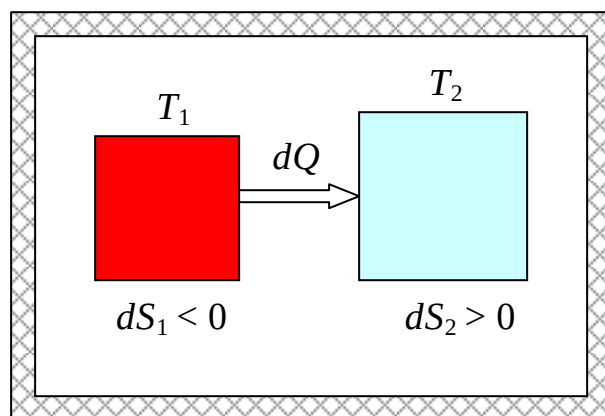


Рис. 6.1

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (6.11)$$

Следуя определению приращения энтропии (6.11), для рассматриваемого примера можно записать

$$\frac{dQ_1}{T_1} = dS_1; \quad \frac{dQ_2}{T_2} = dS_2. \quad (6.12)$$

Поскольку $|dQ_1| = |dQ_2|$, а $T_1 > T_2$, то

$$|dS_1| < |dS_2|, \quad (6.13)$$

то есть приобретённая водой энтропия больше, чем потерянная металлом. Значит, в результате процесса передачи теплоты от холодного тела к горячему энтропия системы возросла.

Рассмотрим ещё пример: пусть система состоит из теплонепроницаемого сосуда с пористой перегородкой и газа, который занимает первоначально только одну половину сосуда (рис. 6.2 а).

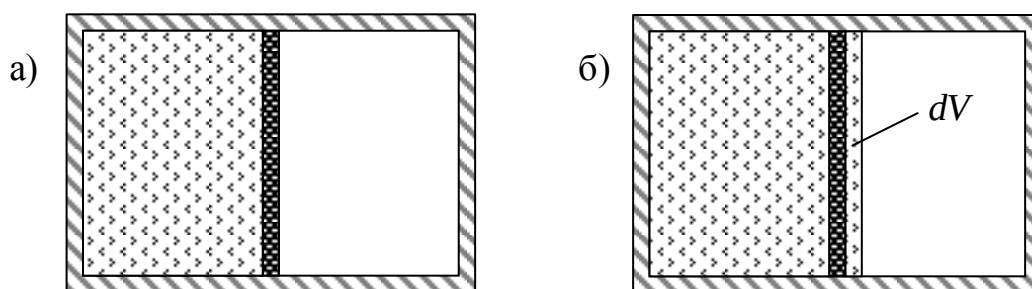


Рис. 6.2

Предоставленный сам себе газ начинает расширяться, то есть увеличивать свой объём. Так как пористая перегородка не позволяет молекулам быстро просачиваться сквозь неё, то процесс протекает медленно, и температура газа не меняется. Первый закон термодинамики для этого случая запишется так:

$$dQ = dA. \quad (6.14)$$

Заменяя элементарную работу расширения произведением давления на бесконечно малое изменение объёма, а теплоту через энтропию по (6.11), получим

$$TdS = pdV. \quad (6.15)$$

Поскольку здесь идёт процесс расширения, то изменение объёма положительно, и в соответствии с последним равенством положительно и изменение энтропии. *В системе, предоставленной самой себе, энтропия увеличивается.*

Основываясь на этих примерах, можно сделать обобщающий вывод:

- *любые самопроизвольные процессы в изолированной системе приводят к возрастанию энтропии этой системы.*

Сформулированное здесь утверждение носит название *второго начала термодинамики*. Оно, как и *первое начало*, является обобщением наблюдений, а не следует из каких-либо предположений. Второе начало термодинамики определяет *направление* тех процессов, которые будут *самопроизвольно* протекать в *изолированной* системе.

Покажем теперь, что *закон возрастания энтропии изолированной системы имеет смысл лишь для большого числа молекул*. Когда молекул мало, закон теряет силу, так же, как и само понятие энтропии. Пусть в сосуде, описанном выше, находится всего две молекулы (рис 6.3).

Так же, как и прежде, газ вначале находится в одной половине сосуда (рис. 6.3а). Пусть снова идёт процесс расширения в пустоту — газ занимает весь объём сосуда, по одной молекуле в каждой половине (рис. 6.3б и 6.3в). При переходе из состояния а) в состояние б) энтропия *возрастает*, так как газ расширяется. Но здесь, в отличие от первого случая, возможен и обратный процесс — самопроизвольное сжатие: обе молекулы вновь могут оказаться в одной половине сосуда (рис. 6.3г). Этот процесс будет сопровождаться *уменьшением* энтропии. Второй закон термодинамики нарушается.

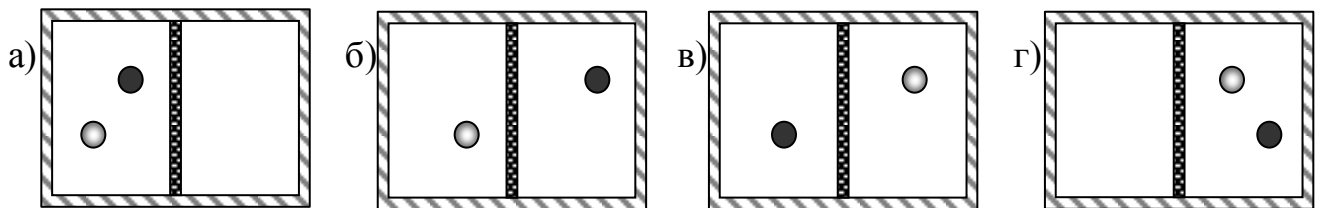


Рис. 6.3

Поскольку второе начало термодинамики приложимо только к достаточно большому числу молекул, говорят, что оно *имеет статистический* смысл (статистика — наука о законах очень большого числа событий). Сама же энтропия S связана с вероятностью w осуществления того или иного состояния системы: чем более вероятно какое-либо состояние системы, тем больше энтропия системы в этом состоянии. Л. Больцман показал, что эта связь выражается формулой

$$S = k \cdot \ln w_T, \quad (6.15)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана; w_T — термодинамическая вероятность состояния.

Заметим, что термодинамическая вероятность больше единицы и равна числу различных способов, которыми может быть реализовано конкретное состояние системы. Так, равновесное состояние системы из двух молекул (см. рис. 6.3) может быть реализовано двумя способами, а каждое из крайних состояний — только одним способом. Система из двух частиц в сосуде, разделённом перегородкой, может иметь всего 4 состояния (см. рис. 6.3), и вероятность равновесного состояния (2 раза по $1/4$) в два раза больше, чем вероятность неравновесных состояний ($1/4$). Как показывают статистические расчёты, число возможных состояний в системе, состоящей из N частиц, составляет 2^N , вероятность равновесного состояния $\approx \frac{0,8}{\sqrt{N}}$, вероятность того, что все молекулы соберутся в одной половине сосуда, равна $\frac{1}{2^N}$.

Из-за статистического смысла второго начала возможны нарушения его в отдельных микрообъёмах, где число молекул мало. В них возможны, как показано выше, процессы самопроизвольного сжатия. Такие микрообъёмы будут иметь плотность, отличную от средней плотности газа. Эти отклонения называют *флуктуациями*. Понятие флуктуации применимо не только к плотности. Любая физическая величина, характеризующая не одну частицу, а их ансамбль, может испытывать флуктуации.

Флуктуации плотности были обнаружены в земной атмосфере. Солнечные лучи, проходящие через неё, испытывают на них рассеяние. Оно происходит при определённых для каждой длины волны размерах тех областей, плотность которых отлична от среднего значения. В атмосфере нашей планеты эти размеры таковы, что рассеянными оказываются голубые лучи, которые и обеспечивают голубой цвет неба.

6.4. Понятие о необратимых процессах

Рассмотренные выше примеры помогут нам установить ещё одно широко используемое в физике понятие. В рассмотренных нами примерах (см. рис. 6.1 и 6.2) процессы могут протекать только в одном направлении: тепло может передаваться только от горячего тела к холодному, а газ, предоставленный сам себе, может только расширяться. *Процессы, которые самопроизвольно идут только в одном направлении, называются необратимыми.*

Рис. 6.3 иллюстрирует случай, когда процесс может самопроизвольно протекать как в прямом, так и в обратном направлении. Такие процессы называются обратимыми. Примером необратимого процесса является передача тепла, которая идёт только в одном направлении — от горячего тела к холодному. Необратимыми являются все явления переноса, рассмотренные в параграфах 5.13–5.14. Это *диффузия, теплопроводность, внутреннее трение.*

Примеры обратимых процессов мы найдём в механике, если поставим одно условие: не принимать во внимание процессы трения. Так, падение упругого шарика на стальную плиту, переход любого колеблющегося тела из состояния мак-

симального отклонения в состояние равновесия полностью обратимы. В обратимых процессах переход энергии из одного вида в другой идёт без потерь механической энергии в полном соответствии с законом её сохранения. Но в природе эти же процессы становятся необратимыми, поскольку трение приводит к переходу некоторого количества механической энергии в тепло. Закон сохранения при этом не нарушается, но система не может вернуться в исходное состояние. Процесс становится необратимым.

Зададим себе вопрос: значит ли это, что в природе все процессы необратимы в принципе? Или возможно сделать их обратимыми, собрав всё выделившееся тепло и обратив его в работу, которая поднимет падающий шарик на прежнюю высоту? Для превращения теплоты в работу необходимо осуществить циклический процесс (6.1). Если его коэффициент полезного действия 100%, принципиально можно добиться, чтобы процесс стал обратимым.

Цикл, с помощью которого мы попытаемся осуществить поставленную задачу, будет состоять из двух изотермических и двух адиабатических процессов. Изотермический процесс нам более всего подходит, поскольку в этом процессе внутренняя энергия не изменяется, и подведённая теплота полностью превращается в работу. На рис 6.4 изображены две изотермы, верхняя из которых соответствует процессу расширения газа при подводе к нему теплоты Q_1 от нагревателя, температура которого равна T_1 . Вторая изотерма отображает процесс сжатия газа, при котором работу совершают внешние силы, и происходит *выделение* теплоты Q_2 , равной работе сжатия.

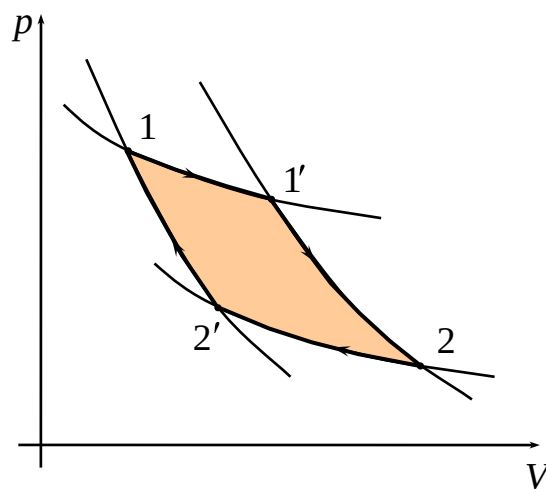


Рис. 6.4

Чтобы затраченная работа $A_{2-2'}$ была меньше полученной $A_{1-1'}$, процесс сжатия нужно проводить при более низких давлениях, чем процесс расширения и, следовательно, при более низкой температуре T_2 . (Напомним, что работа видна на рисунке, как площадь под кривыми).

Для охлаждения газа от температуры нагревателя T_1 до температуры *холодильника* T_2 , используем процесс адиабатического расширения $1' \rightarrow 2$. Соответственно, для возврата в исходное состояние 1, нужно провести адиабатическое сжатие $2' \rightarrow 1$. На рис. 6.4 эти процессы представлены двумя адиабатами, соединяющими две изотермы. В результате проведения цикла было затрачена энергия в виде теплоты Q_1 и лишь часть её, равная разности $Q_1 - Q_2$, превращена в полезную работу.

Коэффициент полезного действия этого цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (6.16)$$

Покажем теперь, что он меньше 100% даже при этих идеальных условиях. Воспользуемся для доказательства понятием энтропии. Когда система получает количество теплоты Q_1 от нагревателя (тела, отдающего тепло), то её энтропия увеличивается на ΔS_1 , а при передаче теплоты Q_2 холодильнику (телу, принимающему тепло) — уменьшается на ΔS_2 :

$$\Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_1}; \quad \Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (6.17)$$

Поскольку после проведения цикла система вернулась в исходное состояние, то её энтропия не изменилась, и $|\Delta S_1| = |\Delta S_2|$. Пренебрегая знаком теплоты, получим

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \quad \text{и} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (6.18)$$

Подстановка этого выражения в (6.16) даёт формулу для определения коэффициента полезного действия идеального цикла Карно:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (6.19)$$

Поскольку температура холодильника всегда выше абсолютного нуля температуры, то коэффициент полезного действия меньше единицы. Отсюда следует, что *теплота ни при каких условиях не может полностью перейти в работу*. Вышеизложенное позволяет сделать вывод, что в природе все реальные процессы в замкнутых системах необратимы, и протекают самопроизвольно лишь в сторону увеличения энтропии, то есть увеличения хаотичности движения.

Вопросы для подготовки к экзамену

- 1. Введение.** Роль и место физики в познании мира Основные понятия механики. Пространство, время, движение. Три периода в развитии физики как науки.
- 2. Кинематика.** Перемещение точки. Векторный, координатный и естественный способы описания движения точки. Скорость. Ускорение. Прямая и обратная задачи кинематики. Кинематические уравнения. Ускорение при криволинейном движении. Тангенциальное, нормальное и полное ускорения при движении точки по криволинейной траектории. Вращательное движение твердого тела. Угол поворота, угловая скорость, угловое ускорение как аксиальные векторы. Связь между соответствующими угловыми и линейными величинами. Кинематические уравнения для вращательного движения.
- 3. Динамика материальной точки.** Инерциальные системы отсчета. Законы Ньютона. Сила, масса, количество движения, импульс силы.
- 4. Работа и энергия.** Работа постоянной и переменной силы. Мощность. Работа в потенциальном поле сил. Энергия: кинетическая, потенциальная, полная механическая. Связь работы и энергии. Закон сохранения механической энергии. Космические скорости.
- 5. Закон сохранения импульса.** Центр масс системы тел и его движение. Импульс системы. Закон сохранения импульса и следствия из него. Принцип ре-

активного движения. Движение тела переменной массы. Столкновение тел. Случаи абсолютно упругого и неупругого соударений.

6. **Динамика вращательного движения твердого тела.** Момент силы, момент инерции, момент количества движения. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела ("II закон Ньютона"). Аналогия между законами поступательного и вращательного движений. Вычисление моментов инерции отдельных тел. Теорема Штейнера. Кинетическая энергия, работа и мощность при вращательном движении. Закон сохранения момента импульса. Гироскопический эффект.
7. **Колебательное движение.** Уравнение гармонических колебаний. Амплитуда, период, циклическая частота, фаза колебаний. Скорость и ускорение колеблющейся точки. Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний. Физический и пружинный маятники. Энергия гармонических колебаний. Затухающие и вынужденные колебания. Резонанс. Векторный метод представления колебаний. Сложение колебаний одинакового направления. Векторная диаграмма. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковых и кратных частот. Фигуры Лиссажу.
8. **Волновой процесс.** Уравнение плоской волны. Длина волны, волновое число, фазовая скорость. Поперечные и продольные волны. Эффект Доплера. Энергия волнового движения, поток энергии. Вектор Умова.
9. **Тепловое движение молекул.** Масса и размеры молекул. Моль. Число Авогадро. Давление идеального газа. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории. Средняя энергия поступательного движения молекул и абсолютная температура. Уравнение состояния идеального газа. Максвелловское распределение молекул по скоростям. Средняя квадратичная, наиболее вероятная и средняя арифметическая скорости молекул. Больцмановское распределение частиц в потенциальном поле.
10. **Явления переноса.** Средняя длина свободного пробега, число столкновений, эффективный диаметр молекул. Явления переноса в газах: теплопроводность, внутреннее трение, диффузия и их эмпирические уравнения. Связь между коэффициентами переноса. Явления в разреженных газах. Вакуум.
11. **Основы термодинамики.** Внутренняя энергия идеального газа и реальных систем. Работа газа при расширении. Первое начало динамики. Теплоёмкость. Связь между теплоёмкостями при постоянном давлении и при постоянном объеме. Молярная теплоёмкость идеального газа с различным количеством атомов в молекуле. Сопоставление теории с опытом для одно- и двухатомного газов. Адиабатический процесс. Уравнение Пуассона для адиабаты. Работа идеального газа при различных процессах. Тепловые двигатели. Цикл Карно. Энтропия. Второе начало термодинамики
12. **Реальные газы.** Уравнение Ван-дер-Ваальса. Теоретические и экспериментальные изотермы реального газа. Критическое состояние вещества, критическая температура. Эффект Джоуля — Томсона. Сжижение газов.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Больцман (Boltzmann) Людвиг (20.II.1844–5.IX.1906).

Австрийский физик-теоретик. Один из основоположников классической статистической физики. Основные работы в области кинетической теории газов, термодинамики и теории излучения. Вывел в 1866 закон распределения газовых молекул по скоростям (статистика Больцмана). Формула равновесного больцмановского распределения легла в основу классической статистической физики. В 1871 высказал эргодическую гипотезу. Применяя статистические методы к кинетической теории идеальных газов, вывел (1872) основное кинетическое уравнение газов, являющееся основой физической кинетики. Связал энтропию физической системы с вероятностью ее состояния (1872) и доказал статистический характер второго начала термодинамики, дав ему свою формулировку, чем был нанесен удар идеалистической гипотезе тепловой смерти Вселенной. Впервые применил к излучению принцип термодинамики. Используя гипотезу Дж. Максвелла о световом давлении, в 1884 теоретически открыл закон теплового излучения, по которому излучаемая энергия абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры тела. Этот закон был экспериментально установлен в 1879 Й. Стефаном (закон Стефана–Больцмана).

Броун (Brown) Роберт (21.XII.1773–10.VI.1858).

Английский ботаник. Морфолого-эмбриологические исследования Брауна имели большое значение для построения естественной системы растений. Впервые правильно описал ядро в растительных клетках. Открыл в 1827 броуновское движение, беспорядочное движение малых (размерами в нескольких мкм и менее) частиц, взвешенных в жидкости или газе, происходящее под действием толчков со стороны молекул окружающей среды. Видимые только под микроскопом взвешенные частицы движутся независимо друг от друга и описывают сложные зигзагообразные траектории.

Ватт (Watt) Джеймс (19.I.1736–10.VIII.1819)

Шотландский изобретатель Джеймс Ватт усовершенствовал конструкцию первоначального парового двигателя, обеспечив, тем самым, возможность его успешного применения во всех отраслях промышленности. Он улучшил паровой двигатель, изобретенный английским инженером Т. Ньюкоменом (1663–29) и сделал его более производительным. Работы Ватта способствовали возникновению промышленной революции в Великобритании. В 1800-е годы значительная доля энергии британской промышленности обеспечивалась новыми паровыми двигателями Ватта. Ватт (W), единица работы или мощности, названа по имени Джеймса Ватта. Мощность таких электрических устройств, как электрические лампы и нагреватели, указывается в ваттах.

Галилей (Galilei) Галилео (1564–1642)

Итальянский ученый, один из основателей естествознания.

Свое первое открытие – закон колебания маятника – сделал еще в юности. С 1589 читает лекции в Пизанском университете. В 1590 Галилей пишет трактат «О движении», в котором выступает с резкими возражениями против воззрений Аристотеля и открывает, что ускорение свободного падения тел не зависит от их массы. В 1592 получает кафедру университета в Падуе.

Важнейшим достижением Галилея в динамике было создание принципа относительности, ставшего основой современной теории относительности. Решительно отказавшись от представлений Аристотеля о движении, Галилей пришел к выводу, что движение (имеются в виду только механические процессы) относительно, то есть нельзя говорить о движении, не уточнив, по отношению к какому «телу отсчета» оно происходит; законы же движения безотносительны, и поэтому, находясь в закрытой кабине (он образно писал «в закрытом помещении под палубой корабля»), нельзя никакими опытами установить, покоится ли эта кабина или же движется равномерно и прямолинейно («без толчков», по выражению Галилея).

Первые известия об изобретении в Голландии подзорной трубы дошли до Венеции уже в 1609. Заинтересовавшись этим открытием, Галилей значительно усовершенствовал прибор. 7 января 1610 произошло знаменательное событие: направив построенный телескоп (примерно с 30-кратным увеличением) на небо, Галилей заметил возле планеты Юпитер три светлые точки, это были спутники Юпитера (позже Галилей обнаружил и четвертый). Повторяя наблюдения через определенные интервалы времени, он убедился, что спутники обращаются вокруг Юпитера. Это послужило наглядной моделью кеплеровской системы, убежденным сторонником которой сделали Галилея размышления и опыт.

Изобретение телескопа позволило обнаружить фазы Венеры и убедиться, что Млечный Путь состоит из огромного числа звезд. Открыв солнечные пятна и наблюдая их перемещение, Галилей совершенно правильно объяснил это вращением Солнца. Изучение поверхности Луны показало, что она покрыта горами и изрыта кратерами. Даже этот беглый перечень позволил бы причислить Галилея к величайшим астрономам, но его роль была исключительной уже потому, что он произвел поистине революционный переворот, положив начало инструментальной астрономии в целом.

В десятых годах XVII века начались гонения. Галилею удалось отстоять свое учение, но ненадолго: после выхода в 1632 «Диалога о приливах и отливах», где в форме разговора трех собеседников дано представление о двух главных системах мира Птолемея и Коперника, ему было предписано явиться в Рим. Допросы, угроза пыток сломили больного ученого, и 22 июня в монастыре св. Минервы Галилей отрекается от своих взглядов и приносит публичное покаяние. Теперь до конца жизни он стал узником инквизиции и принужден был жить на своей вилле

Арчетри близ Флоренции. И лишь в 1992 папа Иоанн Павел II объявил решение суда инквизиции ошибочным и реабилитировал Галилея.

Дюлонг (Dulong) Пьер Луи (12.II.1785–19.VII.1838).

Французский физик и химик, член Парижской АН (1823). По образованию врач. Профессор химии Ветеринарной школы. С 1820 профессор физики Политехнической школы в Париже. Впервые получил хлористый азот (1811) и фосфорноватистую кислоту (1816). В 1815, почти одновременно с Г. Дэви, предложил водородную теорию кислот. В 1819 совместно с А. Пти установил закон теплоемкости твердых тел; они вывели также общую формулу скорости охлаждения тел и изобрели катетометр. В 1824–30 Дюлонг совместно с Д. Араго определил давление насыщенного водяного пара при различных температурах (до 224 °C).

Кеплер (Kepler) Иоганн (1571–1630)

Немецкий астроном, один из творцов астрономии нового времени. Предположил, что природа планет родственна земной. Кеплер был сторонником идей Коперника о том, что планеты обращаются вокруг Солнца. На основе многолетних наблюдений, выполненных Тихо Браге, он открыл законы движения планет (законы Кеплера – 1609, 1602, 1618 года) и составил эфемериды. Заложил основы теории затмений. Изобрел телескоп, в котором объектив и окуляр – двояковыпуклые линзы. Выведенные из наблюдений законы Кеплера были использованы впоследствии Ньютоном для обоснования закона всемирного тяготения.

Клапейрон (Clapeyron) Бенуа Поль Эмиль (26.I.1799–28.I.1864)

Французский физик, член Парижской АН (1858). Окончил Политехническую школу в Париже (1818). В 1820–30 работал в Петербурге в институте инженеров путей сообщения. По возвращении во Францию был профессором Школы мостов и дорог в Париже. В 1834 обратил внимание на работу С. Карно, повторил его рассуждения и, впервые применив графический метод в термодинамике, придал его результатам геометрическую форму. Исследуя цикл Карно, вывел уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона). Ввел зависимость точки плавления и кипения от давления (уравнение Клапейрона–Клаузиуса).

Клаузиус (Clausius) Рудольф Юлиус Эмануэль (2.I.1822–24.VIII.1888)

Немецкий физик, один из основателей термодинамики и молекулярно-кинетической теории теплоты. Клаузиус первым понял и проанализировал глубокие идеи С. Карно и оценил их значение для теории теплоты и тепловых машин. Развивая эти идеи, Клаузиус в 1850 (одновременно с У. Томсоном) дал первую формулировку второго начала термодинамики; «Теплота не может сама собою перейти от более холодного тела к более тёплому». Клаузиус доказал, что не существует способа передачи теплоты от более холодного тела к более нагретому без того, чтобы в природе не произошло каких-либо изменений, которые могли бы компенсировать такой переход. В 1865 Клаузиус ввел понятие энтропии.

Ошибочно распространив принцип возрастания энтропии замкнутой системы на всю Вселенную, Клаузиус высказал мысль о тепловой смерти Вселенной.

Клаузиусу принадлежат основополагающие работы в области молекулярно-кинетической теории теплоты. Работы Клаузиуса способствовали введению статистических методов в физику. Клаузиусу удалось с единой точки зрения объяснить такие внешне совершенно различные явления в газах, как внутреннее трение, теплопроводность и диффузия. Он ввел понятие идеального газа, а также понятие длины свободного пробега молекул, впервые вычислив (1860) эту длину. Доказал теорему вириала (1870), связывающую среднюю кинетическую энергию системы частиц с действующими в ней силами. Построил кинетическую теорию перехода вещества из одного агрегатного состояния в другое и в 1850 обосновал уравнение, связывающее изменение температуры плавления с изменением давления (уравнение Клапейрона–Клаузиуса).

Клаузиус внес важный вклад в теорию электролиза (1857). Теоретически обосновал закон Джоуля–Ленца, развил термодинамическую теорию термоэлектричества (1853) и др. Развивая идеи итальянского ученого О. Ф. Моссотти (1847), Клаузиус разработал теорию поляризации диэлектриков, на основе которой установил соотношение между диэлектрической проницаемостью и поляризуемостью (1879; формула Клаузиуса–Моссотти). Иностраннный член Лондонского королевского общества (1868), член-корреспондент Парижской АН (1865).

Коперник (Copernik, Copernicus) Николай (1473–1543)

Великий польский астроном. Создатель гелиоцентрической системы мира. Совершил переворот в естествознании, отказавшись от принятого в течение многих веков учения о центральном положении Земли. Объяснил видимые движения небесных светил вращением Земли вокруг оси и обращением планет (в т. ч. Земли) вокруг Солнца. Свое учение изложил в сочинении «О вращении небесных сфер» (1543), запрещенном католической церковью с 1616 по 1828 годы.

Ломоносов Михаил Васильевич (19.XI.1711–15.IV.1765)

Русский ученый. Его исследования относятся к математике, физике, химии, наукам о Земле, астрономии. Ломоносов обратил внимание (1756) на основополагающее значение закона сохранения массы вещества в химических реакциях; изложил (1741–50) основы своего атомно-корпускулярного учения; выдвинул (1744–48) кинетическую теорию теплоты; обосновал (1747–52) необходимость привлечения физики для объяснения химических явлений и предложил для теоретической части химии название «физическая химия», а для практической части – «техническая химия». Развивая атомистические представления, он высказал мнение о том, что тела состоят из «корпускул», а те в свою очередь из «элементов»; это соответствует современным представлениям о молекулах и атомах. В химической лаборатории Петербургской АН выполнялась широкая программа экспериментальных исследований. Разработал точные методы взвешивания, применял объемные методы количественного анализа. Изучал жидкое, газообразное

и твердое состояние тел. Достаточно точно определил коэффициенты расширения газов. Создал различные приборы (вискозиметр, прибор для фильтрования под вакуумом, прибор для определения твердости, газовый барометр, пирометр, котел для исследования веществ при низком и высоком давлении), достаточно точно градуировал термометры. Разработал технологию и рецептуру цветных стекол, которые он употреблял для создания мозаичных картин. Высказал идею биогенного происхождения гумуса почвы. Доказал органическое происхождение нефтей, каменного угля, торфа и янтаря. Первым из русских академиков приступил к подготовке учебников по химии и металлургии. По его проекту в 1748 завершена постройка химической лаборатории Петербургской АН.

Майер (Mayer) Юлиус Роберт (25.XI.1814–20.III.1878).

Немецкий врач и физик. В 1841 послал издателю журнала «*Annalen der Physik*» И. К. Поггендорфу свою первую статью «О количественном и качественном определении сил», которая содержала положение, близкое по смыслу к закону сохранения энергии (эта статья не была напечатана). Более совершенное изложение своих воззрений Майер дал в статье «Замечания о силах неживой природы» (опубликована в 1842). В работе «Органическое движение в его связи с обменом веществ» (1845) Майер четко сформулировал закон сохранения энергии и теоретически рассчитал численное значение механического эквивалента теплоты. По представлениям Майера, движение, теплота, электричество и т. п. – качественно различные формы «сил» (так Майер называл энергию), превращающихся друг в друга в равных количеств. соотношениях. Он рассмотрел также применение этого закона к процессам, происходящим в живых организмах, утверждая, что аккумулятором солнечной энергии на Земле являются растения, в других же организмах происходят лишь превращения веществ и «сил», но не их создание. Идеи Майера не были поняты его современниками; это обстоятельство, а также травля в связи с оспариванием приоритета в открытии закона сохранения энергии привели к тому, что весной 1850 Майера сделал попытку покончить жизнь самоубийством. Правильную оценку работ Майера впервые дал Г. Гельмгольц.

Максвелл (Maxwell) Джеймс Клерк (1831–79)

Английский физик, создатель классической электродинамики, один из основоположников статистической физики, организатор и первый директор (с 1871) Кавендишской лаборатории. Развивая идеи М. Фарадея, создал теорию электромагнитного поля (уравнения Максвелла); ввел понятие о токе смещения, предсказал существование электромагнитных волн, выдвинул идею электромагнитной природы света. Установил статистическое распределение, названное его именем. Исследовал вязкость, диффузию и теплопроводность газов. Показал, что кольца Сатурна состоят из отдельных тел. Труды по цветному зрению и колориметрии (диск Максвелла), оптике (эффект Максвелла), теории упругости (теорема Максвелла, диаграмма Максвелла – Кremoны), термодинамике, истории физики и др.

О роли Максвелла в развитии науки превосходно сказал американский физик Р. Фейнман: «В истории человечества (если посмотреть на нее, скажем, через десять тысяч лет) самым значительным событием XIX столетия, несомненно, будет открытие Максвеллом законов электродинамики. На фоне этого важного научного открытия гражданская война в Америке в том же десятилетии будет выглядеть провинциальным происшествием».

Менделеев Дмитрий Иванович (8.II.1834–2.II.1907)

Русский ученый-энциклопедист. Ранние научные работы посвящены изучению изоморфизма и удельным объемам (1854–56). Открыл (1860) «температуру абсолютного кипения жидкостей». Автор фундаментального труда «Основы химии», выдержавшего при жизни Д. И. Менделеева восемь изданий. В ходе работ над первым изданием пришел к идее о периодической зависимости свойств химических элементов от их атомных весов. В 1869–1871 изложил основы учения о периодичности, открыл периодический закон и разработал периодическую систему химических элементов. На основе системы впервые предсказал (1870) существование и свойства нескольких не открытых еще элементов, в том числе «экаалюминия» – галлия (открыт в 1875), «экабора» – скандия (1879), «экасилиция» – германия (1886). Осуществил фундаментальный цикл работ по изучению растворов, разработав гидратную теорию растворов. Создал (1873) новую метрическую систему измерения температуры. Нашел (1874) общее уравнение состояния идеального газа, обобщив уравнение Клапейрона (уравнение Клапейрона–Менделеева).

Ньютон (Newton) Исаак (1643–1727)

Английский математик, механик, астроном и физик, создатель классической механики, член (1672) и президент (с 1703) Лондонского королевского общества.

В 1664–67, когда в Лондоне свирепствовала чума, Ньютон сделал три важнейших открытия: дифференциальное и интегральное исчисления, объяснение природы света, закон всемирного тяготения, описанные в фундаментальных трудах «Математические начала натуральной философии» (1687) и «Оптика» (1704).

В механике Ньютон продолжил труды Галилея и Кеплера. Он сформулировал основные законы классической механики. Открыл закон всемирного тяготения, дал теорию движения небесных тел, создав основы небесной механики. Пространство и время считал абсолютными.

В «Оптике» обосновал законы отражения и преломления света на основе корпускулярной теории, исследовал интерференцию и дифракцию. В опытах с призмой открыл дисперсию света и разложил белый цвет в спектр. Построил первый зеркальный телескоп.

Был директором Монетного двора, наладил монетное дело в Англии. В 1703 Ньютон стал президентом Лондонского Королевского общества. Работы Ньютона на несколько столетий стали фундаментом для физики и техники. Некоторые от-

крытия Ньютона оспаривались его современниками (в том числе Р. Гуком и Г. Лейбницем).

Исаак Ньютон был торжественно похоронен в Вестминстерском аббатстве. Над его могилой высится памятник с бюстом и эпитафией «Здесь покоится сэр Исаак Ньютон, дворянин, который почти божественным разумом первый доказал с факелом математики движение планет, пути комет и приливы океанов. Он исследовал различие световых лучей и проявляющиеся при этом различные свойства цветов... Пусть смертные радуются, что существует такое украшение рода человеческого».

Перрен (Perrin) Жан Батист (30.IX.1870–17.IV.1942)

Французский физик, член Парижской АН (1923). По окончании Высшей нормальной школы в Париже (1894) работал там же. С 1898 – в Парижском университете (профессор с 1910). В 1940, после капитуляции Франции, выехал в США. Исследовал природу катодных и рентгеновских лучей (1895–98) и доказал, что первые представляют собой поток заряженных частиц. Изучал электрокинетические явления и предложил прибор для исследования электроосмоса (1904). Работы Перрена по изучению броуновского движения явились экспериментальным подтверждением теории Эйнштейна–Смолуховского; они позволили Перрену получить значение числа Авогадро, хорошо согласующееся со значениями, полученными др. методами, и окончательно доказать реальность молекул. Установил бимолекулярную структуру тонких мыльных пленок. Совместно с сыном Ф. Перреном исследовал явления флуоресценции. Был популяризатором науки, его книга «Атомы» (1913, русский перевод 1924) стала классической. Почетный член АН СССР (1929, член-корреспондент 1924). Нобелевская премия (1926).

Птолемей Клавдий (ок. 90 – ок. 160)

Древнегреческий ученый, последний крупный астроном античности. Дополнил звездный каталог Гиппарха. Соорудил специальные астрономические инструменты: астролябию, армиллярную сферу, триквентр. Описал положение 1022 звезд. Разработал математическую теорию движения планет вокруг неподвижной Земли (используя представление видимого движения небесных тел при помощи комбинаций круговых движений – эпициклов), позволявшую вычислить их положение на небе. Вместе с теорией движения Солнца и Луны она составила т. н. птолемею систему мира. Достигнув высокой по тем временам точности, теория, тем не менее, не объясняла изменение блеска Марса и другие парадоксы античной астрономии. Система Птолемея изложена в его главном труде «Альмагест» («Великое математическое построение астрономии в XIII книгах») – энциклопедии астрономических знаний древних. В «Альмагесте» приведены также сведения по прямолинейной и сферической тригонометрии, впервые дано решение ряда математических задач. В области оптики исследовал преломление и рефракцию света. В труде «География» дал свод географических сведений античного мира.

В течение полутора тысяч лет теория Птолемея являлась основным астрономическим учением. Весьма точная для своей эпохи, она со временем стала сдерживающим фактором в развитии науки и была заменена на гелиоцентрическую теорию Коперника.

Циолковский Константин Эдуардович (1857–1935)

Российский ученый и изобретатель, основоположник современной космонавтики. Труды в области аэро- и ракетодинамики, теории самолета и дирижабля. В детстве почти полностью потерял слух и с 14 лет учился самостоятельно; в 1879 году экстерном сдал экзамен на звание учителя, всю жизнь преподавал физику и математику (с 1892 в Калуге). Впервые обосновал возможность использования ракет для межпланетных сообщений, указал рациональные пути развития космонавтики и ракетостроения, нашел ряд важных инженерных решений конструкции ракет и жидкостного ракетного двигателя. Технические идеи Циолковского находят применение при создании ракетно-космической техники.

В философско-художественном эссе Циолковский развивал «космическую философию», которая опирается на идею «атома» – бессмертного одушевленного элементарного существа, курсирующего от организма к организму во Вселенной. Космическая утопия Циолковского предполагает расселение человечества в Солнечной системе и других звездных мирах, а в будущем полную биохимическую перестройку обитателей Земли и превращение их в разумные «животно-растения», непосредственно перерабатывающие солнечную энергию.

Цельсий (Celsius) Андерс (27.XI.1701–25.IV.1744)

Шведский астроном, физик. Ученому принадлежит большое количество работ по астрономии, геофизике и физике. Ему удалось внести вклад в изучение северных территорий, в частности он принимал участие в Лапландской экспедиции (1736–37) по измерению меридиана. По возвращении из полярных областей Цельсий начал активную работу по организации и строительству астрономической обсерватории в Упсале и в 1740 стал ее директором. В 1742 он предложил 100-градусную шкалу термометра, в которой за ноль градусов принимается температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении, а за 100 градусов – температура таяния льда. Деление шкалы составляет 1/100 этой разницы. Однако общепринятое выражение, к примеру, «плюс 21 градус по Цельсию» не относится напрямую к шкале шведского ученого. Дело в том, что у самого Цельсия нулем отмечалась точка кипения воды, а точка таяния льда – числом 100. Мы же пользуемся Международной практической температурной шкалой, установленной в Международном комитете мер и весов, взявшей за основу принципы Цельсия и Кельвина.

Эйнштейн (Einstein) Альберт (14.III.1879–18.IV.1955)

Физик-теоретик, один из основателей современной физики, иностранный член-корреспондент РАН (1922) и иностранный почетный член АН СССР (1926). Родился в Германии, с 1893 жил в Швейцарии, в 1933 эмигрировал в США.

В 1905 вышла в свет его первая серьезная научная работа, посвященная броуновскому движению: «О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, вытекающем из молекулярно-кинетической теории». В том же году вышла и другая работа Эйнштейна «Об одной эвристической точке зрения на возникновение и превращение света». Вслед за Максом Планком он выдвинул предположение, что свет испускается и поглощается дискретно, и сумел объяснить фотоэффект. Эта работа была удостоена Нобелевской премии (1921).

Наибольшую известность Эйнштейну все же принесла теория относительности, изложенная им впервые в 1905 году, в статье «К электродинамике движущихся тел». Эйнштейн решительно отверг концепцию эфира, что позволило рассматривать принцип равноправия всех инерциальных систем отсчета как универсальный, а не только ограниченный рамками механики. Он выдвинул удивительный и на первый взгляд парадоксальный постулат, что скорость света для всех наблюдателей, как бы они ни двигались, одинакова. Следствием этого постулата стало появление в теории относительности преобразований Лоренца.

С 1914 года Эйнштейн снова в Германии. К этому времени полным ходом шла работа над общей теорией относительности. В результате совместных усилий Эйнштейна и его бывшего студенческого товарища М. Гроссмана в 1912 появилась статья «Набросок обобщенной теории относительности», а окончательная формулировка теории датируется 1915 годом. По мнению многих ученых, она явилась самым значительным и самым красивым теоретическим построением за всю историю физики. Опираясь на всем известный факт, что «гравитационная» и «инертная» массы равны, удалось найти принципиально новый подход к решению проблемы, поставленной еще И. Ньютоном: каков механизм передачи гравитационного взаимодействия между телами и что является переносчиком этого взаимодействия. По Эйнштейну таковой была сама геометрия пространства-времени. Общая теория относительности позволила приблизиться к решению многих проблем современной космологии, в т. ч. и основной из них – проблеме эволюции Вселенной. Ученый искал решения своего уравнения для всей Вселенной, но удача улыбнулась А. Фридману, доказавшему, что Вселенная расширяется.

В эти годы Эйнштейн работал и над другими проблемами. Он разработал статистику частиц целого спина, ввел понятие вынужденного излучения, играющего важную роль в лазерной физике, предсказал гиромагнитный эффект. Однако не принимал вероятностный характер квантовой физики, утверждая, что «Бог не играет в кости». В 1933 году Эйнштейн вынужден был переехать в Принстон (США). Там он продолжил работу над единой теорией поля, а также инициировал американские ядерные исследования, правда, впоследствии не раз выступая против применения ядерного оружия. Среди многочисленных почестей, оказанных Эйнштейну, было предложение стать президентом Израиля, последовавшее в 1952, которое он не принял.

Библиографический список

1. Ландау, Л.Д. Механика и молекулярная физика: учебник / Л.Д. Ландау, А.И. Ахиезер, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1978.
2. Киттель, Ч. Механика: учебное пособие / Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. – М.: Наука, 1971. – 478 с.
3. Ландсберг, Г.С. Оптика: учебное пособие / Г.С. Ландсберг. – М.: Наука, 1976. – 926 с.
4. Детлаф, А.А. Курс физики: учебник / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высшая школа, 1999.
5. Савельев, И.В. Курс общей физики: учебное пособие: в 3 т. / И.В. Савельев. – М.: Наука, 2004. – Т. 1.
6. Эйнштейн, А. Физика и реальность: сб. ст. / А. Эйнштейн, Л. Инфельд. – М.: Наука, 1967.
7. Эйнштейн, А. Эволюция физики: монография / А. Эйнштейн. – М.: Наука, 1967.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	3
Система обозначений	3
1. Введение	5
1.1. Понятие о векторах и простейших действиях над ними.....	5
2. Кинематика	
2.1. Кинематические характеристики движения материальной точки...	8
2.2. Нормальное ускорение. Его направление и модуль. Модуль полного ускорения	12
2.3. Кинематические уравнения движения материальной точки	13
2.4. Движение тела, брошенного под углом к горизонту	16
2.5. Кинематические характеристики вращательного движения и их связь с линейными характеристиками	18
2.6. Кинематические уравнения вращательного движения	20
3. Динамика	
3.1. Понятие силы. Третий закон Ньютона. Масса инертная и тяготеющая	24
3.2. Второй закон Ньютона. Условия возникновения движения. Закон инерции	26
3.3. Понятие импульса и закон его сохранения. Реактивное движение ..	29
3.4. Упругий удар	31
3.5. Понятие момента инерции и момента силы. Второй закон Ньютона для вращения	34
3.6. Понятие момента импульса и закон его сохранения	36
3.7. Работа переменной силы при поступательном движении и при вращении	38

3.8. Работа в потенциальном поле. Потенциальная энергия	40
3.9. Вычисление потенциальной энергии. Потенциальные кривые	41
3.10. Кинетическая энергия. Закон сохранения энергии	44
3.11. Космические скорости. Невесомость	45
4. Колебания и волны	
4.1. Кинематика гармонических колебаний	48
4.2. Динамика колебаний материальной точки. Собственная частота колебаний	50
4.3. Энергия колебаний	53
4.4. Затухающие колебания	54
4.5. Вынужденные колебания	55
4.6. Сложение колебаний	57
4.7. Волны	60
5. Молекулярная физика	
5.1. Предмет и методы молекулярной физики. Понятие моля	63
5.2. Опытные газовые законы	66
5.3. Элементы теории вероятностей	70
5.4. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории	73
5.5. Понятие о степенях свободы, равнораспределение энергии молекул по степеням свободы	76
5.6. Вычисление теплоёмкостей C_V и C_p , сравнение вычисленных значений с опытными	77
5.7. Распределение молекул в потенциальном силовом поле	79
5.8. Распределение молекул по скоростям	81
5.9. Характерные скорости молекул	82
5.10. Опыт Штерна	84
5.11. Явления переноса	85
5.12. Длина свободного пробега молекул в газе	88
5.13. Внутреннее трение	89
5.14. Диффузия	92
5.15. Теплопроводность	94
5.16. Твёрдое тело	96
5.17. Теплоёмкость твёрдых тел	99
5.18. Жидкости	101
6. Термодинамика	
6.1. Предмет и методы термодинамики	102
6.2. Первое начало термодинамики. Внутренняя энергия и энтальпия	103
6.3. Второе начало термодинамики. Энтропия	105
6.4. Понятие о необратимых процессах	108
Вопросы для подготовки к экзамену	110
Именной указатель	112
Библиографический список	121

